Plaquette 3 – Accroissements finis, Taylor et étude locale des courbes

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Inégalités. $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$; si $\|f'\| \leq M$ sur $[a,b]$:

$$\|f(b)-f(a)\| \leq M(b-a)$$

Taylor-Lagrange. Si $\|f^{(n+1)}\| \leq M$ sur $[a,b]$: $\left\|f(b)-\sum_{k\leq n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Allure locale (p, q définis ci-dessus) :

— p impair, q pair : point ordinaire ; p impair, q impair : point d'inflexion ;

— p pair, q impair : rebroussement de première espèce ; p pair, q pair : rebroussement de seconde espèce.

Correction de l'exercice 1 – La corde est plus courte que l'arc

a) $\|f'\| = 1$, donc $\|f(t)-f(s)\| \leq |t-s|$.

b) $\|f(t)-f(s)\|^2 = 2-2\cos(t-s) = 4\sin^2\frac{t-s}{2}$, soit

$$\|f(t)-f(s)\| = 2\left|\sin\frac{t-s}{2}\right| \leq |t-s|$$

ce qui équivaut à $|\sin u| \leq |u|$ avec $u = \frac{t-s}{2}$.

c) Non : $|\sin u| < |u|$ pour $u \neq 0$; la corde est strictement plus courte que l'arc.

Réponse. $\|f(t)-f(s)\| = 2|\sin\frac{t-s}{2}| \leq |t-s|$, inégalité stricte pour $t \neq s$.

Correction de l'exercice 2 – Pas d'égalité des accroissements finis

a) $f'(c) = (2c, 3c^2) = (1,1)$ impose $c = \frac{1}{2}$ et $c^2 = \frac{1}{3}$: incompatible. Aucun c ne convient.

b) $\|f(1)-f(0)\|_2 = \sqrt{2}$ et

$$\sup_{[0,1]}\|f'\|_2 = \sup\sqrt{4c^2+9c^4} = \sqrt{13}$$

et $\sqrt{2} \leq \sqrt{13}$ ✓.

c) $c = \frac{1}{2}$ pour la première, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour la seconde : les points diffèrent, c'est pourquoi l'égalité vectorielle échoue.

Réponse. Aucun c ne vérifie $f(1)-f(0) = f'(c)$; seule l'inégalité subsiste.

Correction de l'exercice 3 – Constante de Lipschitz d'une courbe

a) $f'(t) = (-\sin t, 2\cos 2t)$ et $\cos 2t = 1-2u$: $\|f'\|^2 = u + 4(1-2u)^2 = g(u)$, $u \in [0,1]$.

b) g est un trinôme convexe : son maximum sur $[0,1]$ est atteint en une extrémité, $g(0) = 4$, $g(1) = 5$. Donc $\sup\|f'\| = \sqrt{5}$ (en $t = \frac{\pi}{2}$), et par l'IAF

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\|f(t)-f(s)\| \le \sqrt{5}\,|t-s|$$

c) $\dfrac{\|f(\frac{\pi}{2}+h)-f(\frac{\pi}{2})\|}{|h|} \to \|f'(\frac{\pi}{2})\| = \sqrt{5}$: aucune constante plus petite ne convient.

Réponse. $\|f'\|^2 = u + 4(1-2u)^2 \le 5$: f est $\sqrt{5}$-lipschitzienne, constante optimale.

Correction de l'exercice 4 – Norme de l'intégrale et cas d'égalité

a) $\|I\| = \langle I, u\rangle = \int \langle f, u\rangle$ (linéarité de l'intégrale), et $\langle f, u\rangle \le \|f\|$ (Cauchy-Schwarz).

b) Égalité $\Leftrightarrow \int (\|f\| - \langle f, u\rangle) = 0$ avec un intégrande continu positif, donc nul : $\langle f(t), u\rangle = \|f(t)\|$, cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, soit $f(t)$ positivement colinéaire à u.

c) $I = \left(\int_0^\pi \cos t, \int_0^\pi \sin t\right) = (0, 2)$:

$$\|I\| = 2 < \pi = \int_0^\pi \|f\|$$

inégalité stricte car f change de direction.

Réponse. $\|\int f\| \le \int \|f\|$, égalité ssi f garde une direction fixe ; exemple : $2 < \pi$.

Correction de l'exercice 5 – Développement limité de la cycloïde

a) $f(t) = \left(\frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}\right) + o(t^3)$.

b) $f'(0) = 0$, $f''(0) = (0,1) \neq 0$: $p = 2$. $f''(0) = (1,0)$ non colinéaire à $f''(0)$: $q = 3$. p pair, q impair :

rebroussement de première espèce, tangente verticale

c) $x \sim \frac{t^3}{6}$ et $y \sim \frac{t^2}{2}$: $t \sim (6x)^{1/3}$, d'où $y \sim \dfrac{(6x)^{2/3}}{2} = \left(\frac{36}{8}\right)^{1/3} x^{2/3} = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} x^{2/3}$.

Réponse. $f(t) = (\frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}) + o(t^3)$, $p = 2$, $q = 3$: rebroussement de première espèce.

Correction de l'exercice 6 – Reste de Taylor pour une exponentielle de matrice

a) $F''(s) = A^2 \exp(sA)$, et

$$\exp(tA) = I + tA + \int_0^t (t-s)A^2 \exp(sA)\,\mathrm{d}s$$

b) $\|A^2 \exp(sA)\| \le \|A\|^2 \mathrm{e}^{s\|A\|} \le \|A\|^2 \mathrm{e}^{t\|A\|}$ et $\int_0^t (t-s)\,\mathrm{d}s = \frac{t^2}{2}$.

c) $\|A\| = 1$ (rotation) : erreur $\le 0{,}005\,\mathrm{e}^{0,1} \approx 5{,}5 \times 10^{-3}$. Ici $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et l'erreur réelle est de l'ordre de $\frac{t^2}{2} = 5 \times 10^{-3}$.

Réponse. $\|\exp(tA) - I - tA\| \le \frac{t^2}{2}\|A\|^2 \mathrm{e}^{t\|A\|}$; pour $t = 0{,}1$, environ 5×10^{-3}.

Correction de l'exercice 7 – Valeur moyenne d'un mouvement circulaire

a) $\int_0^{2\pi} \cos t = \int_0^{2\pi} \sin t = 0$: la position moyenne est le centre $(0, 0)$.

b) $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ et $\sin t \cos t = \dfrac{\sin 2t}{2}$:

$$\int_0^{2\pi} g = (\pi, 0)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $g(t) = \frac{1}{2}(1+\cos 2t, \sin 2t) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) + \frac{1}{2}(\cos 2t, \sin 2t)$: cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ parcouru deux fois ; la moyenne est le centre, et $2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}, 0\right) = (\pi, 0)$ ✓.

Réponse. Moyenne de f : l'origine ; $\int_0^{2\pi} g = (\pi, 0)$, g décrivant le cercle de centre $(\frac{1}{2}, 0)$.

Correction de l'exercice 8 – Systèmes à coefficients antisymétriques variables

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f\|^2 = 2\langle A(t)f, f\rangle = 0$ (antisymétrie), et une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante.

b) Oui : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, g\rangle = \langle Af, g\rangle + \langle f, Ag\rangle = \langle Af, g\rangle - \langle Af, g\rangle = 0$. Le flot préserve les produits scalaires : il agit par isométries.

c) $f'(t) = t\left(-\sin\frac{t^2}{2}, \cos\frac{t^2}{2}\right)$ et

$$A(t)f(t) = \left(-t\sin\frac{t^2}{2}, t\cos\frac{t^2}{2}\right) = f'(t) \ \checkmark$$

et $\|f\| = 1$ constant.

Réponse. $\|f\|$ et $\langle f, g\rangle$ constants : le flot est isométrique ; exemple $f = (\cos\frac{t^2}{2}, \sin\frac{t^2}{2})$.

Correction de l'exercice 9 – Lemme de Gronwall vectoriel

a) $\varphi' = 2\langle f, f'\rangle \le 2\|f\|\|f'\| \le 2k\|f\|^2$.

b) $\left(\varphi\, \mathrm{e}^{-2kt}\right)' = (\varphi' - 2k\varphi)\mathrm{e}^{-2kt} \le 0$, donc $\varphi(t)\mathrm{e}^{-2kt} \le \varphi(0)$, et

$$\|f(t)\| \le \|f(0)\|\mathrm{e}^{kt}$$

c) $f = 0$. Si f et g sont deux solutions avec la même valeur initiale, $h = f - g$ vérifie $\|h'\| = \|A(t)h\| \le k\|h\|$ ($k = \sup\|A\|$) et $h(0) = 0$, donc $h = 0$.

Réponse. $\varphi' \le 2k\varphi$ donne $\|f(t)\| \le \|f(0)\|\mathrm{e}^{kt}$; d'où l'unicité des solutions.

Correction de l'exercice 10 – Point régulier et concavité

a) $f'(0) = (1, 0) \neq 0$: $p = 1$. $f''(0) = (2, 2)$ n'est pas colinéaire à $(1, 0)$: $q = 2$.

b) p impair, q pair : point ordinaire (régulier, sans inflexion). Tangente dirigée par $(1, 0)$: la droite $y = 0$.

c) $f(t) - f(0) = t(1, 0) + \frac{t^2}{2}(2, 2) + o(t^2)$, et l'ordonnée vaut

$$y(t) = t^2 + t^3 > 0 \quad \text{pour } t \text{ petit non nul}$$

La courbe est au-dessus de sa tangente, du côté de $f''(0)$.

Réponse. $p = 1$, $q = 2$: point ordinaire, tangente $y = 0$, courbe au-dessus (côté de $f''(0)$).

Correction de l'exercice 11 – Point d'inflexion

a) $f'(0) = (1, 0)$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = (0, 6)$: $p = 1$, $q = 3$, inflexion. La courbe $y = x^3$ traverse sa tangente $y = 0$.

b) $g'(0) = (1, 0)$, $g''(0) = 0$, $g'''(0) = (6, 6)$, non colinéaire à $(1, 0)$: $p = 1$, $q = 3$, inflexion.

c) $g(t) = t(1, 0) + \frac{t^3}{6}(6, 6) + o(t^3)$: l'ordonnée vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$y(t) = t^3$$

négative pour $t < 0$, positive pour $t > 0$: la courbe traverse la tangente $y = 0$ en l'origine.

Réponse. Dans les deux cas $p = 1$, $q = 3$: point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente.

Correction de l'exercice 12 – Rebroussement de seconde espèce

a) $f'(0) = 0$, $f''(0) = (2, 0)$: $p = 2$. $f''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = (0, 24)$, non colinéaire : $q = 4$.

b) p et q pairs : rebroussement de seconde espèce. Les deux branches arrivent tangentiellement à l'axe des abscisses, du même côté de la tangente.

c) $x = t^2 \geq 0$ et $y - x^2 = t^5$: les deux branches ($t > 0$ et $t < 0$) partent de l'origine vers $x > 0$, au-dessus de la tangente, et

$$y = x^2 + t^5 = x^2 \pm x^{5/2}$$

l'une au-dessus de la parabole $y = x^2$, l'autre en dessous : elles se séparent seulement à l'ordre $\frac{5}{2}$.

Réponse. $p = 2$, $q = 4$: rebroussement de seconde espèce ($y = x^2 \pm x^{5/2}$).

Correction de l'exercice 13 – Le segment est le plus court chemin

a) $f(b) - f(a) = \int_a^b f'$, et $\left\| \int f' \right\| \leq \int \|f'\|$.

b) Cas d'égalité de l'inégalité précédente (exercice sur la norme de l'intégrale) : $f'(t) = \|f'(t)\| u$ avec $u = \frac{f(b) - f(a)}{\|f(b) - f(a)\|}$.

c) Alors

$$f(t) = f(a) + \left(\int_a^t \|f'\| \right) u$$

et le coefficient croît de 0 à $L = \|f(b) - f(a)\|$: f parcourt le segment de façon monotone.

Réponse. $L \geq \|f(b) - f(a)\|$, avec égalité ssi la courbe parcourt le segment de façon monotone.

Correction de l'exercice 14 – Spirale logarithmique de longueur finie

a) $f'(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta}(-\cos\theta - \sin\theta, -\sin\theta + \cos\theta)$ et

$$\|f'(\theta)\|^2 = \mathrm{e}^{-2\theta}\Big((\cos\theta + \sin\theta)^2 + (\cos\theta - \sin\theta)^2 \Big) = 2\mathrm{e}^{-2\theta}$$

b) $L_T = \int_0^T \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{-\theta}\, \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}(1 - \mathrm{e}^{-T}) \to \sqrt{2}$: la spirale fait une infinité de tours autour de l'origine en une longueur finie.

c) $\langle f, f' \rangle = \mathrm{e}^{-2\theta}(-\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta) = -\mathrm{e}^{-2\theta}$, et $\cos\alpha = \frac{-\mathrm{e}^{-2\theta}}{\mathrm{e}^{-\theta} \cdot \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\theta}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$: angle constant $\frac{3\pi}{4}$.

Réponse. $\|f'\| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\theta}$, longueur totale $\sqrt{2}$; angle constant $\frac{3\pi}{4}$ entre rayon et vitesse.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une courbe de longueur infinie

a) $\left| t \sin\frac{1}{t} \right| \leq t \to 0$: continuité en 0 ; ailleurs, composées de fonctions C^1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\|f'\| \geq |y'(t)| = \left|\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right| \geq \frac{|\cos(1/t)|}{t} - 1$.

c) $\int_\varepsilon^1 \frac{|\cos(1/t)|}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{|\cos u|}{u}\,\mathrm{d}u$, et sur $[k\pi,(k+1)\pi]$, $\int \frac{|\cos u|}{u} \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$: la somme diverge comme la série harmonique. Donc

$$\int_\varepsilon^1 \|f'\| \geq \int_1^{1/\varepsilon} \frac{|\cos u|}{u}\,\mathrm{d}u - 1 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

d) $g'(t) = \left(1, 2t\sin\frac{1}{t} - \cos\frac{1}{t}\right)$ est bornée (par $\sqrt{1+9}$) : $\int_0^1 \|g'\|$ converge, longueur finie. L'oscillation de f est d'amplitude t, trop grande devant la période $\sim t^2$.

Réponse. La courbe $(t, t\sin\frac{1}{t})$ est de longueur infinie ; $(t, t^2\sin\frac{1}{t})$ est de longueur finie ($\|g'\|$ bornée).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).