Plaquette 4 – Courbes paramétrées : études globales, aires, longueurs et cinématique

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Longueur et aire. Pour une courbe de classe C^1 sur $[a,b]$, fermée et simple pour l'aire :

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t, \qquad A = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - yx')\,\mathrm{d}t$$

Polaires. Pour $r = r(\theta)$: $\|f'\|^2 = r^2 + r'^2$ et $A = \frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$.

Cinématique plane. Avec $v = \|f'\|$, T, N le repère de Frenet et κ la courbure : $f'' = v'T + \kappa v^2 N$; le centre de courbure est $f + \frac{1}{\kappa}N$.

Correction de l'exercice 1 – L'astroïde

a) $f'(t) = 3\cos t \sin t(-\cos t, \sin t)$, nul pour $t \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$: quatre points singuliers $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ (rebroussements).

b) $\|f'\| = 3|\cos t \sin t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$. Par symétrie,

$$L = 4\int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t\,\mathrm{d}t = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

c) $xy' - yx' = \cos^3 t \cdot 3\sin^2 t\cos t + \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t \sin t = 3\cos^2 t \sin^2 t = \frac{3}{4}\sin^2 2t$, d'où $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi$.

Réponse. Quatre rebroussements, longueur 6, aire $\frac{3\pi}{8}$.

Correction de l'exercice 2 – La cardioïde en polaires

a) $f = r(\cos\theta, \sin\theta)$, $f' = r'(\cos\theta, \sin\theta) + r(-\sin\theta, \cos\theta)$, d'où $\|f'\|^2 = r'^2 + r^2 = \sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2 = 2 + 2\cos\theta = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$.

b) $\|f'\| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$, et

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 8$$

c) $A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}$.

Réponse. $\|f'\| = 2|\cos\frac{\theta}{2}|$; longueur 8, aire $\frac{3\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Courbe de Lissajous et symétries

a) $f(-t) = -f(t)$; $f(\pi - t) = (-\sin 2t, \sin 3t)$; $f(\pi + t) = (\sin 2t, -\sin 3t)$.

b) On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on complète par la symétrie d'axe Oy (via $\pi - t$) pour $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, puis par la symétrie d'axe Ox (via $\pi + t$) pour $[\pi, 2\pi]$:

$$[0, 2\pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup [\pi, 2\pi]$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $f'(t) = (2\cos 2t, 3\cos 3t)$. Tangente horizontale : $\cos 3t = 0$, $t = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$ (avec $\cos 2t \neq 0$) ; tangente verticale : $\cos 2t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Réponse. Étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis symétries d'axes Oy et Ox ; tangentes horizontales en $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, verticale en $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 4 – Branches infinies

a) Quand $t \to 1$, x et y tendent vers l'infini, $\frac{y}{x} = t \to 1$, et

$$y - x = \frac{t^3 - t^2}{t - 1} = t^2 \longrightarrow 1$$

donc la droite $y = x + 1$ est asymptote.

b) $x \sim t$ et $y \sim t^2$: $\frac{y}{x} \to +\infty$, branche parabolique de direction Oy.

c) $y - (x+1) = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$: positif pour $t \to 1^+$ (courbe au-dessus), négatif pour $t \to 1^-$ (en dessous).

Réponse. Asymptote $y = x + 1$ en $t \to 1$; branche parabolique de direction Oy en $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 – Aire d'une ellipse et formule de Green

a) $\int_a^b (xy' + yx') = [xy]_a^b = 0$ pour une courbe fermée, d'où $\int xy' = -\int yx'$ et l'égalité.

b) $xy' - yx' = ab\cos^2 t + ab\sin^2 t = ab$, donc $A = \frac{1}{2} \cdot 2\pi ab = \pi ab$.

c) $f(-1) = f(1) = (0,0)$: la boucle est fermée. Avec $A = \left|\int_{-1}^{1} xy'\,\mathrm{d}t\right|$ et $y' = 3t^2 - 1$:

$$\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)(3t^2 - 1)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (3t^4 - 4t^2 + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{6}{5} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{8}{15}$$

aire $\frac{8}{15}$.

Réponse. Ellipse : πab ; boucle de $(t^2 - 1, t^3 - t)$: $\frac{8}{15}$.

Correction de l'exercice 6 – Accélération tangentielle et normale

a) $f' = (1, 2t)$, $v = \sqrt{1 + 4t^2}$, $v' = \frac{4t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$.

b) $\kappa = \frac{\det(f', f'')}{v^3} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$. En $t = 1$: $v' = \frac{4}{\sqrt{5}}$ et

$$\kappa v^2 = \frac{2}{5\sqrt{5}} \cdot 5 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) $f'' = (0, 2)$, $\|f''\|^2 = 4$, et $\frac{16}{5} + \frac{4}{5} = 4$ ✓.

Réponse. En $t = 1$: accélération tangentielle $\frac{4}{\sqrt{5}}$, normale $\frac{2}{\sqrt{5}}$, de norme totale 2.

Correction de l'exercice 7 – Développée de la parabole

a) $T = \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}}$ et $N = \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{1 + 4t^2}}$; $\frac{1}{\kappa} = \frac{(1 + 4t^2)^{3/2}}{2}$.

b) $\frac{1}{\kappa} N = \frac{1 + 4t^2}{2}(-2t, 1)$, donc

$$C(t) = \left(t - t - 4t^3, t^2 + \frac{1}{2} + 2t^2\right) = \left(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Avec $X = -4t^3$, $Y - \frac{1}{2} = 3t^2$: $\left(Y - \frac{1}{2}\right)^3 = 27t^6 = \frac{27}{16}X^2$, parabole semi-cubique avec un rebroussement en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, centre du cercle osculateur au sommet (rayon $\frac{1}{2}$).

Réponse. $C(t) = (-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2})$: parabole semi-cubique $(Y - \frac{1}{2})^3 = \frac{27}{16}X^2$; au sommet, centre $(0, \frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 8 – Spirale d'Archimède

a) $r^2 + r'^2 = \theta^2 + 1$, donc $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2}\, \mathrm{d}\theta$.

b) Avec $\theta = \mathrm{sh}u$: $\int \mathrm{ch}^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{u + \mathrm{sh}u\mathrm{ch}u}{2}$, soit

$$\int \sqrt{1 + \theta^2}\, \mathrm{d}\theta = \frac{\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \mathrm{argsh}\theta}{2}$$

d'où $L = \frac{2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \mathrm{argsh}(2\pi)}{2} \approx 21{,}256$.

c) $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 \, \mathrm{d}\theta = \frac{(2\pi)^3}{6} = \frac{4\pi^3}{3}$.

Réponse. $L = \frac{2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \mathrm{argsh}2\pi}{2} \approx 21{,}26$; aire $\frac{4\pi^3}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Cardioïde comme épicycloïde

a) $f'(t) = 2(-\sin t + \sin 2t, \cos t - \cos 2t)$ et

$$\|f'\|^2 = 4(2 - 2(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)) = 8(1 - \cos t) = 16 \sin^2 \frac{t}{2}$$

b) $L = \int_0^{2\pi} 4 \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = 16$; seul point singulier : $t = 0$, point $(1, 0)$ (rebroussement).

c) Le centre du cercle mobile parcourt le cercle de rayon 2 ($2\mathrm{e}^{it}$), et le point tourne autour de lui à vitesse double ($-\mathrm{e}^{2it}$) : $f = 2\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{2it}$ en complexe. C'est une cardioïde, de longueur 16 (le double de celle de la cardioïde $r = 1 + \cos\theta$, qui est la même courbe à l'échelle $\frac{1}{2}$ près).

Réponse. $\|f'\| = 4|\sin \frac{t}{2}|$, longueur 16, un rebroussement en $(1, 0)$.

Correction de l'exercice 10 – La tractrice

a) $f'(t) = \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}, -\frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^2 t}\right) = \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^2 t}(\mathrm{sh}t, -1)$, donc

$$\|f'(t)\| = \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}^2 t}\sqrt{\mathrm{sh}^2 t + 1} = \mathrm{th}t$$

b) $P(t) = f(t) + \lambda(\mathrm{sh}t, -1)$ avec une ordonnée nulle : $\lambda = \frac{1}{\mathrm{ch}t}$. Distance : $\lambda\|(\mathrm{sh}t, -1)\| = \frac{\mathrm{ch}t}{\mathrm{ch}t} = 1$.

c) La tangente pointe toujours vers le maître, situé sur l'axe à distance 1 : la tractrice est la trajectoire de l'objet traîné.

Réponse. $\|f'\| = \mathrm{th}t$; le segment de tangente jusqu'à l'axe a une longueur constante 1.

Correction de l'exercice 11 – Points doubles et tangentes

a) $s^2 = t^2$ et $s \neq t$ imposent $s = -t$; puis $-t^3 + t = t^3 - t$, soit $t^3 = t$, $t = \pm 1$. Point double $f(\pm 1) = (1, 0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$: $f'(1) = (2, 2)$ et $f'(-1) = (-2, 2)$, d'où les tangentes de pentes 1 et -1 :

$$y = x - 1, \qquad y = -x + 1$$

c) $y' = 3t^2 - 1 = 0$ pour $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (et $x' = 2t \neq 0$), d'où les points $\left(\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, symétriques par rapport à Ox (la courbe l'est, via $t \mapsto -t$).

Réponse. Point double $(1, 0)$ pour $t = \pm 1$, tangentes $y = \pm(x - 1)$, tangentes horizontales en $(\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3\sqrt{3}})$.

Correction de l'exercice 12 – Paramétrage par l'abscisse curviligne

a) $\|f'\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, donc $s = \sqrt{2}\, t$.

b) $g(s) = f\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$, et $\|g'(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f'\| = 1$.

c) $g''(s) = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$, de norme

$$\kappa = \|g''(s)\| = \frac{1}{2}$$

conforme à $\frac{1}{1 + a^2}$ avec $a = 1$.

Réponse. $s = \sqrt{2}\, t$; $g(s) = f(\frac{s}{\sqrt{2}})$; courbure $\|g''\| = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – Longueur de la chaînette

a) $\|f'\| = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{ch} x$, donc

$$L = \int_{-a}^{a} \mathrm{ch} x \, \mathrm{d}x = 2\mathrm{sh} a$$

b) $f'' = (0, \mathrm{ch} x)$, $\det(f', f'') = \mathrm{ch} x$, $\kappa = \frac{\mathrm{ch} x}{\mathrm{ch}^3 x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$; au sommet ($x = 0$), rayon 1.

c) Rayon $\frac{1}{\kappa} = \mathrm{ch}^2 x$, qui est aussi le carré de l'ordonnée : propriété caractéristique de la chaînette.

Réponse. Longueur $2\mathrm{sh} a$, courbure $\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, rayon de courbure $\mathrm{ch}^2 x$.

Correction de l'exercice 14 – La lemniscate de Bernoulli

a) $f(-t) = (x, -y)$: symétrie par rapport à Ox. Comme $\cos(\pi - t) = -\cos t$ et $\sin(\pi - t) = \sin t$, on a $f(\pi - t) = (-x, -y)$: symétrie centrale. On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) $\cos t = 0$ annule les deux coordonnées : $t = \pm\frac{\pi}{2}$ donnent l'origine.

c) Au voisinage de $t = \frac{\pi}{2}$, avec $h = t - \frac{\pi}{2}$: $\cos t = -\sin h \approx -h$, $\sin t \approx 1$, d'où $f \approx \left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. En $-\frac{\pi}{2}$: $\cos t \approx h$, $\sin t \approx -1$, $f \approx \left(\frac{h}{2}, -\frac{h}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Tangentes :

$$y = x \quad \text{et} \quad y = -x$$

Réponse. Symétries par rapport à Ox et à l'origine ; point double en O ($t = \pm\frac{\pi}{2}$), tangentes $y = \pm x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : le folium de Descartes

a) $x^3+y^3=\dfrac{27t^3(1+t^3)}{(1+t^3)^3}=\dfrac{27t^3}{(1+t^3)^2}=3xy$ ✓.

b) $x+y=\dfrac{3t(1+t)}{1+t^3}=\dfrac{3t}{1-t+t^2}\to\dfrac{-3}{3}=-1$ quand $t\to-1$, alors que $x,y\to\pm\infty$: asymptote $x+y+1=0$.

c) $x\sim\dfrac{3}{t^2}$, $y\sim\dfrac{3}{t}$: $f\to 0$. En $t=0$, tangente dirigée par $f'(0)=(3,0)$ (axe Ox) ; quand $t\to\pm\infty$, $\dfrac{y}{x}=t\to\infty$: tangente Oy.

d) $y=tx$ donne $y'=x+tx'$, d’où $xy'-yx'=x^2$ et

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{1+t^3}\right]_0^{+\infty}=\frac{3}{2}$$

Réponse. Asymptote $x+y+1=0$, point double à l’origine (tangentes Ox et Oy), aire de la boucle $\dfrac{3}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).