Plaquette 1 – Dérivation des arcs, Taylor vectoriel et courbes paramétrées

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cadre. $f : I \subset \mathbb{R} \to E$ avec E evn de dimension finie.

— **Dérivabilité** : $f'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$; en dimension finie, cela équivaut à la dérivabilité de **chaque coordonnée** dans une base fixée.

— **Classe** C^k : chaque coordonnée est C^k.

Règles de dérivation.

— $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$;

— **produit par une fonction scalaire** : $(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'$;

— **produit scalaire** : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, g\rangle = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$;

— **produit vectoriel** (dans $\mathbb{R}^3$) : $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$;

— **application bilinéaire continue** B : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B(f,g) = B(f', g) + B(f, g')$;

— **composition** : $(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$.

Conséquence utile : $\|f\|$ est **constante** $\Leftrightarrow \langle f', f\rangle = 0$ — la vitesse est orthogonale au rayon.

Théorèmes.

— **Pas de Rolle vectoriel** : $f(a) = f(b)$ n'implique **pas** l'existence de c avec $f'(c) = 0$.

— **Inégalité des accroissements finis** : si $\|f'\| \leq M$ sur $[a\,;b]$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$.

— **Taylor-Young** : $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left(h^n\right)$.

— **Taylor avec reste intégral** :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Courbes paramétrées. $f'(t)$ est le **vecteur vitesse**, $f''(t)$ l'accélération ; la longueur d'arc vaut $\int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Correction de l'exercice 1 – Dérivée d'une fonction vectorielle

— **Dérivation coordonnée par coordonnée** :

$$f'(t) = (-\sin t,\ \cos t,\ 1), \qquad f''(t) = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

— **Norme de la vitesse** :

$$\|f'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

— La vitesse est **constante en norme** : le mouvement est **uniforme**.

— **Contrôle** : $\langle f'(t), f''(t)\rangle = \sin t \cos t - \cos t \sin t + 0 = 0$ — l'accélération est bien **orthogonale** à la vitesse, conformément à $\|f'\|$ constante ✓

— **Nature de la courbe** : c'est une **hélice circulaire**, de rayon 1 et de pas 2π.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f' = (-\sin t, \cos t, 1)$, $\|f'\| = \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Norme constante

— On part de $\|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t)\rangle = 1$, fonction **constante**.
— **Dérivation du produit scalaire** :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, f\rangle = \langle f', f\rangle + \langle f, f'\rangle = 2\langle f'(t), f(t)\rangle$$

— Cette dérivée est nulle, donc $\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$: les deux vecteurs sont **orthogonaux**.
— **Interprétation cinématique** : un mobile se déplaçant sur une **sphère** a toujours une vitesse **tangente** à celle-ci.
— **Exemple** : $f(t) = (\cos t, \sin t)$ donne $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$, et le produit scalaire vaut $-\sin t\cos t + \cos t \sin t = 0$ ✓
— **Réciproque vraie** : si $\langle f', f\rangle = 0$ partout, alors $\|f\|^2$ est de dérivée nulle, donc constante.

Réponse. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f\|^2 = 2\langle f', f\rangle = 0$.

Correction de l'exercice 3 – Absence de Rolle vectoriel

— **Égalité aux bornes** : $f(0) = (1, 0)$ et $f(2\pi) = (1, 0)$ — identiques ✓
— **Dérivée** : $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$, de norme $\|f'(t)\| = 1 \neq 0$ pour tout t.
— Il n'existe donc **aucun** c avec $f'(c) = 0$: le **théorème de Rolle est faux** pour les fonctions vectorielles.
— **Explication** : les deux coordonnées s'annulent bien (Rolle scalaire), mais **pas au même instant** — $-\sin t$ s'annule en $0, \pi, 2\pi$, $\cos t$ en $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
— **Ce qui survit** : l'**inégalité** des accroissements finis reste valable, $\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)$; ici $0 \leq 2\pi$ ✓ — c'est elle qu'on utilise en pratique.

Réponse. $f(0) = f(2\pi)$ mais $\|f'\| = 1$: pas de Rolle vectoriel.

Correction de l'exercice 4 – Inégalité des accroissements finis

— **Dérivée** : $f'(t) = \left(\mathrm{e}^t, \cos t\right)$, donc

$$\|f'(t)\|_2 = \sqrt{\mathrm{e}^{2t} + \cos^2 t} \leq \sqrt{\mathrm{e}^2 + 1} \approx \sqrt{8{,}389} \approx 2{,}896$$

— **IAF** : $\|f(1) - f(0)\|_2 \leq 2{,}896 \times (1 - 0) = 2{,}896$.
— **Valeur exacte** : $f(1) - f(0) = (\mathrm{e} - 1,\ \sin 1) \approx (1{,}718\,;\, 0{,}841)$, de norme $\sqrt{2{,}953 + 0{,}708} \approx 1{,}913$.
— **Comparaison** : $1{,}913 \leq 2{,}896$ ✓ — la majoration est correcte, quoique large.
— **Pourquoi cet écart ?** L'IAF majore par le **maximum** de la vitesse, atteint seulement en $t = 1$; sur la plus grande partie du trajet la vitesse est bien plus faible.
— **Cas d'égalité** : il faudrait une vitesse **constante et de direction fixe**, c'est-à-dire un mouvement rectiligne uniforme.

Réponse. Majoration 2,90 ; valeur exacte $\approx 1{,}91$.

Correction de l'exercice 5 – Produit vectoriel

Méthode 1 — calcul direct.

— $f \wedge g = \left(t^2 \cdot t - 1 \cdot 0,\ 1 \cdot 1 - t \cdot t,\ 0 - t^2\right) = \left(t^3,\ 1 - t^2,\ -t^2\right)$.
— Dérivée : $\left(3t^2,\ -2t,\ -2t\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Méthode 2 — règle du produit.

— $f' = (1, 2t, 0)$ et $g' = (0, 0, 1)$.

— $f' \wedge g = (2t \cdot t - 0,\ 0 - 1 \cdot t,\ 0 - 2t) = \left(2t^2,\ -t,\ -2t\right)$.

— $f \wedge g' = \left(t^2 \cdot 1 - 0,\ 0 - t \cdot 1,\ 0 - 0\right) = \left(t^2,\ -t,\ 0\right)$.

— **Somme** : $\left(3t^2,\ -2t,\ -2t\right)$ ✓ — identique.

— **Leçon** : la règle de Leibniz vaut pour **toute application bilinéaire continue** (produit scalaire, vectoriel, matriciel), à condition de **respecter l'ordre** des facteurs pour les produits non commutatifs.

Réponse. $\left(3t^2,\ -2t,\ -2t\right)$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 6 – Longueur d'arc

— **Vitesse** : $\|f'(t)\| = \sqrt{2}$ (calculé plus haut), constante.

— **Longueur** :

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{2} \times 2\pi = 2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}886$$

— **Contrôle géométrique** : l'hélice fait un tour de circonférence $2\pi \approx 6{,}283$ en montant de 2π. En « déroulant » le cylindre, on obtient l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 2π et 2π, soit $2\pi\sqrt{2}$ ✓

— **Remarque** : la longueur est **invariante par reparamétrage** — c'est une propriété géométrique de la courbe, pas du paramétrage choisi.

Réponse. $L = 2\pi\sqrt{2} \approx 8{,}89$.

Correction de l'exercice 7 – Taylor vectoriel

On applique la formule **coordonnée par coordonnée**.

— $f(0) = (1, 1)$; $f'(t) = \left(\mathrm{e}^t, -\sin t\right)$ donc $f'(0) = (1, 0)$; $f''(t) = \left(\mathrm{e}^t, -\cos t\right)$ donc $f''(0) = (1, -1)$.

$$f(h) = (1, 1) + h(1, 0) + \frac{h^2}{2}(1, -1) + o\left(h^2\right)$$

— Soit $f(h) = \left(1 + h + \frac{h^2}{2},\ 1 - \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2)$ — on reconnaît les DL usuels ✓

— **Interprétation cinématique** : le terme d'ordre 1 donne la **tangente** ; celui d'ordre 2 décrit la **courbure** du trajet.

— **Contrôle** en $h = 0{,}1$: le DL donne $(1{,}105\,;\,0{,}995)$ contre la valeur exacte $(1{,}10517\,;\,0{,}99500)$ ✓

Réponse. $f(h) = \left(1 + h + \frac{h^2}{2},\ 1 - \frac{h^2}{2}\right) + o(h^2)$.

Correction de l'exercice 8 – Mouvement à accélération centrale

— **Dérivation du produit vectoriel** :

$$(f \wedge f')' = f' \wedge f' + f \wedge f''$$

— Le premier terme est **nul** ($u \wedge u = 0$).

— Le second est nul aussi : f'' est **colinéaire** à f, et le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

— Donc $(f \wedge f')' = 0$: le vecteur $f \wedge f'$ est **constant**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Interprétation physique** : c'est la **conservation du moment cinétique** dans un champ de force **centrale** (gravitation, force de Coulomb).
— **Conséquence célèbre** : le mouvement reste dans le **plan** orthogonal à ce vecteur constant — c'est la première loi de Kepler, les planètes décrivant des orbites planes.

Réponse. $(f \wedge f')' = f \wedge f' = 0$: moment cinétique conservé.

Correction de l'exercice 9 – Intégrale d'une fonction vectorielle

— **Intégration coordonnée par coordonnée** :

$$\int_0^{\pi} f = \left([\sin t]_0^{\pi},\ [-\cos t]_0^{\pi},\ \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} \right) = \left(0,\ 2,\ \frac{\pi^2}{2}\right)$$

— **Norme du résultat** : $\sqrt{0 + 4 + \frac{\pi^4}{4}} = \sqrt{4 + 24{,}352} \approx 5{,}325$.
— **Intégrale de la norme** : $\|f(t)\| = \sqrt{1 + t^2}$, et

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 + t^2}\, \mathrm{d}t \approx 6{,}110$$

— **Vérification** : $5{,}325 \leq 6{,}110$ ✓
— **Pourquoi l'inégalité ?** Les contributions vectorielles se **compensent** partiellement (ici la première coordonnée s'annule), alors que les normes s'ajoutent toujours positivement.
— **Cas d'égalité** : il faudrait que f garde une **direction constante**.

Réponse. $\left(0,\ 2,\ \frac{\pi^2}{2}\right)$, de norme $\approx 5{,}33 \leq 6{,}11$.

Correction de l'exercice 10 – Courbe paramétrée

— **Vitesse** : $f'(t) = \left(2t,\ 3t^2\right)$, donc $f'(0) = (0, 0)$: le point $t = 0$ est **singulier** (point stationnaire).
— **Développement** : $f(t) = t^2(1, 0) + t^3(0, 1)$.
— Les **exposants caractéristiques** sont $p = 2$ (premier vecteur non nul) et $q = 3$.
— p **pair** et q **impair** : c'est un **point de rebroussement de première espèce** (cusp).
— **Tangente** : elle est dirigée par $(1, 0)$, soit l'axe des abscisses.
— **Vérification** : la courbe est $y^2 = x^3$ (cubique cuspidale) ; pour $x > 0$, $y = \pm x^{3/2}$ — les deux branches se rejoignent en O avec une tangente horizontale commune, en forme de pointe ✓
— **Leçon** : en un point singulier, la tangente existe encore, mais l'allure locale (rebroussement, inflexion, point ordinaire) dépend de la parité de p et q.

Réponse. Point singulier : rebroussement de première espèce, tangente horizontale.

Correction de l'exercice 11 – Fonction à valeurs matricielles

— **Dérivée coefficient par coefficient** :

$$M'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

— **Produit** $JM(t)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Égalité vérifiée** ✓
— **Interprétation** : $M(t) = \exp(tJ)$, et la relation $M' = JM$ avec $M(0) = I$ caractérise l'exponentielle de matrice.
— **Contrôle supplémentaire** : $M(t)$ est orthogonale pour tout t, donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M^{\mathsf{T}}M\right) = 0$; cela impose $M^{\mathsf{T}}J^{\mathsf{T}}M + M^{\mathsf{T}}JM = M^{\mathsf{T}}\left(J + J^{\mathsf{T}}\right)M = 0$, ce qui est vrai puisque J est **antisymétrique** ✓

Réponse. $M'(t) = JM(t)$: $M(t) = \exp(tJ)$.

Correction de l'exercice 12 – Inégalité de Taylor-Lagrange vectorielle

a) Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 :

$$\|f(t) - T_2(t)\| = \left\| \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f''(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leq \frac{|t|^3}{6} \sup \|f''\|$$

et $f''(s) = (\sin s, -\cos s)$ est de norme euclidienne 1.

b) Pour $|t| \leq 0{,}1$: erreur $\leq \frac{0{,}001}{6} \approx 1{,}67 \times 10^{-4}$.

c) En $t = 0{,}1$: $\cos 0{,}1 - 0{,}995 \approx 4{,}2 \times 10^{-6}$ et $\sin 0{,}1 - 0{,}1 \approx -1{,}666 \times 10^{-4}$, d'où une erreur $\approx 1{,}666 \times 10^{-4}$: la borne est presque atteinte (la seconde coordonnée a son terme d'ordre 3 maximal).

Réponse. Erreur $\leq \frac{|t|^3}{6}$; en $t = 0{,}1$, environ $1{,}67 \times 10^{-4}$, borne quasi optimale.

Correction de l'exercice 13 – Longueur d'une arche de cycloïde

a) $f'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ et

$$\|f'(t)\|^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) = 4\sin^2 \frac{t}{2}$$

b) $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in 2\pi\mathbb{Z}$: points de rebroussement, quand le point touche le sol.

c) $L = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8$: une arche mesure 8 fois le rayon.

Réponse. $\|f'\| = 2|\sin\frac{t}{2}|$, singularités en $2k\pi$, longueur d'arche 8.

Correction de l'exercice 14 – Courbure d'une courbe plane

a) $f' = (-R\sin t, R\cos t)$, $f'' = (-R\cos t, -R\sin t)$, $\det(f', f'') = R^2$, $\|f'\| = R$: $\kappa = \frac{1}{R}$.

b) $f' = (1, 2t)$, $f'' = (0, 2)$, det = 2 :

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}, \qquad \kappa(0) = 2$$

le cercle osculateur au sommet a pour rayon $\frac{1}{2}$.

c) Avec $g = f \circ \varphi$: $g' = \varphi' f'$, $g'' = \varphi'' f' + \varphi'^2 f''$, donc $\det(g', g'') = \varphi'^3 \det(f', f'')$ et $\|g'\|^3 = \varphi'^3 \|f'\|^3$ ($\varphi' > 0$) : même courbure.

Réponse. Cercle : $\kappa = \frac{1}{R}$; parabole : $\kappa(0) = 2$; invariance par reparamétrage croissant.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : mouvement circulaire

a) - **Vitesse** : $f'(t) = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t))$, de norme $\|f'\| = R|\omega|$ — constante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Accélération** : $f''(t) = \big(-R\omega^2\cos(\omega t),\ -R\omega^2\sin(\omega t)\big)$.

b) - On constate que $f''(t) = -\omega^2 f(t)$: l'accélération est **colinéaire à la position et de sens opposé** — elle pointe vers le **centre**, elle est **centripète**.

— **Norme** : $\|f''\| = R\omega^2$.

— En fonction de la vitesse $v = R\omega$: $\|f''\| = \dfrac{v^2}{R}$ — formule classique de l'accélération centripète.

— **Contrôles** : $\langle f', f\rangle = -R^2\omega\sin\cos + R^2\omega\cos\sin = 0$ ✓ (vitesse tangente, norme constante) ; et $\langle f'', f'\rangle = 0$ ✓ (vitesse de norme constante).

— **Application numérique** : pour $R = 2$ m et $\omega = 3$ rad/s, $v = 6$ m/s et $\|f''\| = 18$ m/s² — soit environ $1{,}8\,g$.

Réponse. b) $f'' = -\omega^2 f$, de norme $R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).