Plaquette 2 – Dérivation des fonctions vectorielles : produits, normes et matrices

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Applications multilinéaires. Pour B bilinéaire et f, g dérivables :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(f(t),g(t)) = B(f'(t),g(t)) + B(f(t),g'(t))$$

Normes et déterminants.

— $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f\| = \frac{\langle f, f'\rangle}{\|f\|}$ là où $f \neq 0$ (norme euclidienne).

— $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(f_1,\dots,f_n) = \sum_i \det(f_1,\dots,f_i',\dots,f_n)$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det M = \mathrm{tr}\left(\mathrm{com}(M)^{\mathsf{T}}M'\right)$.

Matrices. $(MN)' = M'N + MN'$; $(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$; $(M^2)' = M'M + MM'$ (et non $2MM'$ en général).

Correction de l’exercice 1 – Dérivée de la norme

a) $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$, et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, f\rangle = 2\langle f, f'\rangle$; on dérive la racine là où $\langle f, f\rangle > 0$.

b) $\langle f, f'\rangle = t + 2t^3$ et $\|f\| = t\sqrt{1+t^2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f\| = \frac{t+2t^3}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

Directement : $\left(t\sqrt{1+t^2}\right)' = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$, même résultat.

c) $\|f(t)\| = |t|\sqrt{1+t^2}$ a des dérivées à droite et à gauche 1 et -1 en 0 : non dérivable, bien que f le soit.

Réponse. $\|f\|' = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ pour $t > 0$; $\|f\|$ n’est pas dérivable en 0.

Correction de l’exercice 2 – Dérivée d’un déterminant et loi des aires

a) Le déterminant est bilinéaire en dimension finie (donc continu) : règle de dérivation d’une application bilinéaire.

b) Avec $g = f'$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(f,f') = \det(f',f') + \det(f,f'') = 0 + 0$$

car un déterminant de deux vecteurs colinéaires est nul.

c) $\frac{1}{2}\det(f,f')\,\mathrm{d}t$ est l’aire balayée par le rayon vecteur pendant $\mathrm{d}t$: pour une force centrale (f'' colinéaire à f), la vitesse aréolaire est constante (deuxième loi de Kepler).

Réponse. $\det(f,f')' = \det(f,f'') = 0$ si $f'' \parallel f$: loi des aires.

Correction de l’exercice 3 – Dérivée du déterminant d’une matrice

a) $\det M = 1 - t^3$, de dérivée $-3t^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\operatorname{com}(M)^{\mathsf T} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ -t^2 & 1 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix}$:

$$\operatorname{com}(M)^{\mathsf T} M' = \begin{pmatrix} -2t^2 & 1 \\ 2t & -t^2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr} = -3t^2 \ \checkmark$$

c) $\operatorname{com}(M)^{\mathsf T} = (\det M) M^{-1}$, d'où la formule. Pour $M = \exp(tA)$: $M^{-1}M' = A$, donc $(\ln \det M)' = \operatorname{tr} A$ et $\det \exp(tA) = \mathrm{e}^{t \operatorname{tr} A}$.

Réponse. $(\det M)' = -3t^2 = \operatorname{tr}(\operatorname{com}(M)^{\mathsf T} M')$; $(\ln \det M)' = \operatorname{tr}(M^{-1}M')$.

Correction de l'exercice 4 – Dérivée de l'inverse d'une matrice

a) $(MM^{-1})' = M'M^{-1} + M(M^{-1})' = 0$, et l'on multiplie à gauche par M^{-1} :

$$(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$$

b) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de dérivée $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Et $M' = E_{12}$, $M^{-1}E_{12}M^{-1} = E_{12}$ (car E_{12} commute avec M^{-1} et $E_{12}M^{-1} = E_{12}$), d'où $-E_{12}$ ✓.

c) $\left(\frac{1}{m}\right)' = -\frac{m'}{m^2}$: la formule matricielle respecte l'ordre des facteurs, ce qui est invisible en dimension 1.

Réponse. $(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$, vérifié sur la transvection.

Correction de l'exercice 5 – Dérivée d'une puissance de matrice

a) $M^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = tI$, de dérivée I.

b) $M' = E_{12}$; $2MM' = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I$, mais

$$M'M + MM' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \ \checkmark$$

c) En général $(M^k)' = \sum_{j=0}^{k-1} M^j M' M^{k-1-j}$; si $M(t)$ et $M'(t)$ commutent, cette somme vaut $kM^{k-1}M'$.

Réponse. $(M^2)' = I = M'M + MM' \neq 2MM'$; formule $kM^{k-1}M'$ si M et M' commutent.

Correction de l'exercice 6 – Courbes dans le groupe orthogonal

a) On dérive $M^{\mathsf T}M = I$ (la transposition est linéaire) :

$$(M')^{\mathsf T}M + M^{\mathsf T}M' = 0, \quad \text{soit} \quad \left(M^{\mathsf T}M'\right)^{\mathsf T} = -M^{\mathsf T}M'$$

b) En $t = 0$, $M^{\mathsf T}M' = M'(0)$.

c) $R_t^{\mathsf T} R_{t'} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, antisymétrique ✓ : c'est J, le « vecteur vitesse » du groupe des rotations en I.

Réponse. $M^{\mathsf T}M'$ antisymétrique ; pour les rotations planes, $R_t^{\mathsf T}R_{t'} = J$.

Correction de l'exercice 7 – Point le plus proche et orthogonalité

a) $g(t) = \|f(t) - a\|^2$ est dérivable, minimale en t_0 intérieur, donc $g'(t_0) = 2\langle f'(t_0), f(t_0) - a\rangle = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\langle f'(t), f(t)\rangle = (1+t) - (2-t) + t = 3t - 1 = 0$ pour $t = \frac{1}{3}$, d'où le point $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et

$$d = \sqrt{\frac{16 + 25 + 1}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

c) $g(t) = (1+t)^2 + (2-t)^2 + t^2 = 3t^2 - 2t + 5$ est un trinôme de coefficient dominant positif : minimum atteint en $t = \frac{1}{3}$, valeur $\frac{14}{3}$.

Réponse. $f'(t_0) \perp f(t_0) - a$; distance $\frac{\sqrt{42}}{3}$ au point $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3})$.

Correction de l'exercice 8 – Conservation de l'énergie

a) $E' = 2\langle f', f'\rangle + \langle Af, f\rangle + \langle Af, f'\rangle = 2\langle f', f'\rangle + 2\langle Af, f'\rangle = 2\langle f' + Af, f'\rangle = 0$ (A symétrique).

b) $\langle Af, f\rangle \geq \lambda_{\min}\|f\|^2$ avec $\lambda_{\min} > 0$, donc $\|f\|^2 \leq \frac{E(0)}{\lambda_{\min}}$.

c) $f = (\cos t, \sin 2t)$: $f' = (-\cos t, -4\sin 2t) = -Af$ ✓, et

$$E = \sin^2 t + 4\cos^2 2t + \cos^2 t + 4\sin^2 2t = 5$$

constante ✓.

Réponse. $E = \|f\|^2 + \langle Af, f\rangle$ est conservée ; exemple $f = (\cos t, \sin 2t)$, $E = 5$.

Correction de l'exercice 9 – Régularité d'une fonction définie par morceaux

a) $t|t|$ a pour dérivée $2|t|$ (y compris en 0, taux $|h| \to 0$), continue ; $|t|^3$ a pour dérivée $3t|t|$, continue. Donc

$$f'(t) = (2|t|, 3t|t|)$$

b) $2|t|$ n'est pas dérivable en 0 : f n'est pas C^2 (une coordonnée suffit).

c) $f'(0) = 0$: point singulier. La courbe est l'ensemble des $(s|s|, |s|^3)$, soit $y = |x|^{3/2}$: un point de rebroussement de première espèce en l'origine.

Réponse. $f \in C^1$, $f' = (2|t|, 3t|t|)$, pas C^2 ; $f(0)$ est singulier.

Correction de l'exercice 10 – Moment cinétique et produit vectoriel

a) $(f \wedge f')' = f' \wedge f' + f \wedge f'' = f \wedge f''$.

b) $f' = (-\sin t, \cos t, 1)$, $f'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$:

$$f \wedge f' = (\sin t - t\cos t, -\cos t - t\sin t, 1), \qquad f \wedge f'' = (t\sin t, -t\cos t, 0)$$

et l'on vérifie que la dérivée de la première est la seconde.

c) Si $f \wedge f' = C \neq 0$, alors $\langle f(t), C\rangle = 0$ pour tout t (un produit vectoriel est orthogonal à ses facteurs) : f reste dans le plan orthogonal à C.

Réponse. $(f \wedge f')' = f \wedge f''$; moment cinétique constant non nul ⇒ mouvement plan.

Correction de l'exercice 11 – La clothoïde

a) Coordonnée par coordonnée, $F'(x) = (\cos x^2, \sin x^2)$, de norme 1 : la longueur parcourue entre 0 et x vaut x.

b) $F''(x) = (-2x\sin x^2, 2x\cos x^2)$, et

$$\kappa(x) = \cos x^2 \cdot 2x\cos x^2 + \sin x^2 \cdot 2x\sin x^2 = 2x$$

c) La courbure croît proportionnellement à la longueur parcourue : en suivant la clothoïde à vitesse constante, on tourne le volant à vitesse constante, sans à-coup. On

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'utilise pour les raccordements routiers et ferroviaires.

Réponse. $\|F'\| = 1$, courbure $\kappa(x) = 2x$ proportionnelle à l'abscisse curviligne.

Correction de l'exercice 12 – Courbure et torsion de l'hélice

a) $f' = (-\sin t, \cos t, a)$, $f'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$, $f''' = (\sin t, -\cos t, 0)$, et

$$f' \wedge f'' = (a\sin t, -a\cos t, \sin^2 t + \cos^2 t) = (a\sin t, -a\cos t, 1)$$

b) $\|f' \wedge f''\| = \sqrt{1+a^2}$ et $\|f'\| = \sqrt{1+a^2}$: $\kappa = \dfrac{1}{1+a^2}$.

c) $\det(f', f'', f''') = \langle f' \wedge f'', f'''\rangle = a\sin^2 t + a\cos^2 t = a$, donc $\tau = \dfrac{a}{1+a^2}$. Quand $a \to 0$: $\kappa \to 1$, $\tau \to 0$ (cercle plan) ; quand $a \to +\infty$: $\kappa, \tau \to 0$ (l'hélice s'étire en droite).

Réponse. $\kappa = \dfrac{1}{1+a^2}$, $\tau = \dfrac{a}{1+a^2}$: courbure et torsion constantes.

Correction de l'exercice 13 – Rotation à vitesse angulaire constante

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f\|^2 = 2\langle \omega \wedge f, f\rangle = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f, \omega\rangle = \langle \omega \wedge f, \omega\rangle = 0$ (produit mixte avec un vecteur répété).

b) f reste sur la sphère de rayon $\|f(0)\|$ et dans le plan affine $\langle x, \omega\rangle = \langle f(0), \omega\rangle$: leur intersection est un cercle (ou un point).

c) $\omega \wedge (x, y, z) = (-y, x, 0)$: $x' = -y$, $y' = x$, $z' = 0$, d'où

$$f(t) = (\cos t, \sin t, 2)$$

rotation d'axe ω et de vitesse angulaire $\|\omega\| = 1$.

Réponse. $\|f\|$ et $\langle f, \omega\rangle$ constants : mouvement circulaire ; ici $f(t) = (\cos t, \sin t, 2)$.

Correction de l'exercice 14 – Une fonction à valeurs polynomiales

a) $(X - t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^{n-k} X^k$: les coordonnées sont des polynômes en t, donc dérivables, et en dérivant chacune,

$$P'(t) = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)(-t)^{n-1-k} X^k = -n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-t)^{n-1-k} X^k = -n(X-t)^{n-1}$$

(on a utilisé $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$).

b) Une primitive de P est $-\dfrac{(X-t)^{n+1}}{n+1}$, donc $\int_0^1 P = \dfrac{X^{n+1} - (X-1)^{n+1}}{n+1}$.

c) Coefficient constant de b) : $-\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, et celui de $P(t)$ est $(-t)^n$, d'intégrale $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ ✓.

Réponse. $P'(t) = -n(X-t)^{n-1}$, $\int_0^1 (X-t)^n \,\mathrm{d}t = \dfrac{X^{n+1} - (X-1)^{n+1}}{n+1}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : repère de Frenet et courbure de l'ellipse

a) $\|T\| = 1$ donc $T' \perp T$: $T' = \lambda N$. Avec $f' = vT$, $f'' = v'T + vT' = v'T + \lambda v N$, et $\det(f', f'') = \det(vT, \lambda v N) = \lambda v^2$, d'où $\lambda = \dfrac{\det(f', f'')}{v^2} = \kappa v$. Enfin $N = JT$ (J rotation), donc $N' = JT' = \kappa v JN = -\kappa v T$.

b) $f' = (-a\sin t, b\cos t)$, $f'' = (-a\cos t, -b\sin t)$, $\det(f', f'') = ab$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}$$

c) Le dénominateur est minimal pour $\sin t = 0$ (sommets $(\pm a, 0)$) : $\kappa = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}$, rayon $\frac{b^2}{a}$. Maximal pour $\cos t = 0$ (sommets $(0, \pm b)$) : $\kappa = \frac{b}{a^2}$, rayon $\frac{a^2}{b}$. L'ellipse est plus « pointue » au bout du grand axe.

Réponse. $T' = \kappa v N$, $N' = -\kappa v T$; ellipse : $\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$, maximale ($\frac{a}{b^2}$) aux sommets du grand axe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).