Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cinématique et équations différentielles vectorielles

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivations utiles. $(f\wedge g)'=f'\wedge g+f\wedge g'$; $(\|f\|)'=\frac{\langle f,f'\rangle}{\|f\|}$; $\left(\frac{f}{\|f\|}\right)'=\frac{f'}{\|f\|}-\frac{\langle f,f'\rangle}{\|f\|^3}f$.

Double produit vectoriel. $a\wedge(b\wedge c)=\langle a,c\rangle b-\langle a,b\rangle c$.

Coordonnées polaires. Avec $u_r=(\cos\theta,\sin\theta)$ et $u_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$:

$$f=ru_r,\quad f'=r'u_r+r\theta' u_\theta,\quad f''=(r''-r\theta'^2)u_r+(2r'\theta'+r\theta'')u_\theta$$

Correction de l'exercice 1 – Lois de conservation du problème de Kepler

a) $C'=f'\wedge f'+f\wedge f''=0-\frac{f\wedge f}{\|f\|^3}=0$. Si $C\neq 0$, $\langle f,C\rangle=0$: f reste dans le plan orthogonal à C.

b) $E'=\langle f',f''\rangle+\frac{\langle f,f'\rangle}{\|f\|^3}=-\frac{\langle f',f\rangle}{\|f\|^3}+\frac{\langle f,f'\rangle}{\|f\|^3}=0$.

c) $-\frac{1}{\|f\|}\le E<0$, donc

$$\|f\|\le\frac{1}{|E|}$$

le mouvement est borné (états liés).

Réponse. $C=f\wedge f'$ et $E=\frac12\|f'\|^2-\frac{1}{\|f\|}$ sont conservés ; si $E<0$, $\|f\|\le\frac{1}{|E|}$.

Correction de l'exercice 2 – Orbites circulaires et troisième loi de Kepler

a) $f''=-\omega^2 f$ et $-\frac{f}{\|f\|^3}=-\frac{f}{R^3}$: égalité si et seulement si $\omega^2=\frac{1}{R^3}$.

b) $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi R^{3/2}$, soit

$$T^2=4\pi^2R^3$$

(le carré de la période est proportionnel au cube du rayon).

c) $\|f'\|=R\omega=R^{-1/2}$, donc $E=\frac{1}{2R}-\frac{1}{R}=-\frac{1}{2R}$; $C=f\wedge f'=R^2\omega e_3=\sqrt{R}\,e_3$.

Réponse. $\omega^2R^3=1$, $T^2=4\pi^2R^3$, $E=-\frac{1}{2R}$, $C=\sqrt{R}\,e_3$.

Correction de l'exercice 3 – Chute avec frottement linéaire

a) $v'+kv=-ge_2$: solution $v(t)=\mathrm{e}^{-kt}v_0-\frac{g}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)e_2$.

b) En intégrant de 0 à t :

$$f(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}v_0-\frac{g}{k}\left(t-\frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\right)e_2$$

c) $v(t)\to-\frac{g}{k}e_2$ (vitesse limite verticale). L'abscisse vaut $\frac{a(1-\mathrm{e}^{-kt})}{k}\to\frac{a}{k}$: le projectile ne dépasse jamais l'abscisse $\frac{a}{k}$, alors que sans frottement elle croîtrait indéfiniment.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $v = \mathrm{e}^{-kt}v_0 - \frac{g}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})e_2 \to -\frac{g}{k}e_2$; abscisse limite $\frac{a}{k}$.

Correction de l'exercice 4 – Particule chargée dans un champ magnétique

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f'\|^2 = 2\langle f' \wedge B, f'\rangle = 0$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle f', e_3\rangle = \langle f' \wedge B, e_3\rangle = \omega\langle f' \wedge e_3, e_3\rangle = 0$.

b) $v \wedge \omega e_3 = \omega(v_2, -v_1, 0)$. Avec $w = v_1 + iv_2$: $w' = -i\omega w$, donc $w = w_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$, et v_3 est constante.

c) $f = f_0 + \left(\frac{iw_0}{\omega}(\mathrm{e}^{-i\omega t}-1), v_3 t\right)$ en identifiant $\mathbb{C}$ au plan horizontal : mouvement circulaire de rayon

$$\rho = \frac{|w_0|}{\omega}$$

à vitesse angulaire ω, combiné à une translation uniforme selon e_3 : hélice.

Réponse. Vitesse de norme constante, composante verticale constante ; hélice de rayon $\frac{|w_0|}{\omega}$ (vitesse horizontale sur ω).

Correction de l'exercice 5 – Système affine et équilibre

a) $g' = f' = Af + b = A(f + A^{-1}b) = Ag$, d'où $g(t) = \exp(tA)g(0)$.

b) $\exp(tA) = P\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i t})P^{-1} \to 0$, donc $f(t) \to -A^{-1}b$, l'unique équilibre.

c) $-A^{-1}b = (1,2)$ et

$$f(t) = \left(1-\mathrm{e}^{-t}, 2-2\mathrm{e}^{-2t}\right) \longrightarrow (1,2)$$

Vérification : $f_1' = \mathrm{e}^{-t} = -f_1 + 1$ ✓, $f_2' = 4\mathrm{e}^{-2t} = -2f_2 + 4$ ✓.

Réponse. $f = \exp(tA)(f_0 + A^{-1}b) - A^{-1}b$, convergence vers l'équilibre $-A^{-1}b$; exemple : $(1-\mathrm{e}^{-t}, 2-2\mathrm{e}^{-2t})$.

Correction de l'exercice 6 – Courbes coupant les rayons sous un angle constant

a) $f' = r'u_r + ru_\theta$: dans la base orthonormée (u_r, u_θ), les composantes sont r' et r, donc $\tan\alpha = \frac{r}{r'}$.

b) $\frac{r'}{r} = \frac{1}{\tan\alpha} = c$ constante : $r = r_0\mathrm{e}^{c\theta}$ (spirale logarithmique).

c) $\|f'\| = \sqrt{r'^2 + r^2} = r\sqrt{1+c^2}$, d'où

$$L = \int_{-\infty}^{0} r_0\sqrt{1+c^2}\,\mathrm{e}^{c\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{r_0\sqrt{1+c^2}}{c} = \frac{r_0}{\cos\alpha}$$

longueur finie malgré une infinité de tours autour de l'origine.

Réponse. $r = r_0\mathrm{e}^{\theta/\tan\alpha}$ (spirale logarithmique), longueur jusqu'au pôle $\frac{r_0}{\cos\alpha}$.

Correction de l'exercice 7 – La développante du cercle

a) $f'(t) = (-\sin t + \sin t + t\cos t, \cos t - \cos t + t\sin t) = t(\cos t, \sin t)$, de norme t.

b) $L = \int_0^T t\,\mathrm{d}t = \frac{T^2}{2}$.

c) $f(t) - (\cos t, \sin t) = t(\sin t, -\cos t)$: orthogonal au rayon $(\cos t, \sin t)$ (donc tangent au cercle), de longueur t (longueur de fil déroulée), et

$$\langle t(\sin t, -\cos t), t(\cos t, \sin t)\rangle = 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

la normale à la développante est tangente au cercle.

Réponse. $f' = t(\cos t, \sin t)$, longueur $\frac{T^2}{2}$; le fil tendu est tangent au cercle et normal à la courbe.

Correction de l'exercice 8 – Les courbes de courbure constante

a) $C' = T + \frac{1}{\kappa}N' = T - T = 0$.

b) $\|f - C\| = \left\|\frac{1}{\kappa}N\right\| = \frac{1}{\kappa}$: f est sur le cercle de centre C et de rayon

$$R = \frac{1}{\kappa}$$

c) $T' = 0$: T est constant, $f(s) = f(0) + sT$, la courbe est un segment de droite.

Réponse. $f + \frac{1}{\kappa}N$ constant : courbure constante $\kappa > 0 \Rightarrow$ arc de cercle de rayon $\frac{1}{\kappa}$; $\kappa = 0 \Rightarrow$ segment.

Correction de l'exercice 9 – Dérivée colinéaire à la fonction

a) $g' = \exp\left(-\int_0^t \lambda\right)(-\lambda f + f') = 0$.

b) $f(t) = \exp\left(\int_0^t \lambda\right) f(0)$, avec un coefficient strictement positif.

c) Non en général : $f(t) = (t^3, |t|^3)$ vérifie $f'(t) = (3t^2, 3t|t|)$, colinéaire à $f(t)$ pour tout t, mais

$$f(t) \in \mathbb{R}_+(1,1)\ (t > 0), \qquad f(t) \in \mathbb{R}_+(-1,1)\ (t < 0)$$

la trajectoire change de direction en 0, où f s'annule ($\lambda = \frac{3}{t}$ n'y est pas continue).

Réponse. $f(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t \lambda} f(0)$: trajectoire sur une demi-droite ; faux sans continuité de λ ($(t^3, |t|^3)$).

Correction de l'exercice 10 – Mouvement à vitesse de norme constante

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f'\|^2 = 2\langle f', f''\rangle$, nulle si et seulement si $f'' \perp f'$.

b) Cercle : $f' = R\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$ et $f'' = -\omega^2 f \perp f'$. Hélice $(\cos t, \sin t, t)$:

$$\langle(-\sin t, \cos t, 1), (-\cos t, -\sin t, 0)\rangle = 0$$

c) L'hélice : son accélération $(-\cos t, -\sin t, 0)$ pointe vers l'axe, pas vers un point fixe. Autre exemple : la clothoïde parcourue à vitesse 1.

Réponse. $\|f'\|$ constante $\Leftrightarrow f'' \perp f'$; exemple non centripète : l'hélice.

Correction de l'exercice 11 – Distance minimale entre deux mobiles

a) $f - g = (t-1, t-2)$, donc $d^2 = (t-1)^2 + (t-2)^2 = 2t^2 - 6t + 5$.

b) Minimum en $t = \frac{3}{2}$:

$$d^2_{\min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) $f' - g' = (1,1)$ et $(f-g)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$: produit scalaire nul ✓ (condition $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}d^2 = 2\langle f - g, f' - g'\rangle = 0$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $d^2 = 2t^2 - 6t + 5$, minimum $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $t = \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Oscillateur harmonique vectoriel

a) Chaque coordonnée vérifie $y'' = -\omega^2 y$; la fonction proposée satisfait l'équation et les conditions initiales, et la solution est unique.

b) $f(t) = \cos\theta\, f_0 + \sin\theta\, w_0$ avec $\theta = \omega t$ et $w_0 = \frac{v_0}{\omega}$: image du cercle unité par l'application linéaire injective $(c, s) \mapsto c f_0 + s w_0$, c'est une ellipse centrée en 0.

c) L'aire est multipliée par la « mesure » $\|f_0 \wedge w_0\|$ (aire du parallélogramme construit sur f_0, w_0) :

$$A = \pi \|f_0 \wedge w_0\| = \frac{\pi \|f_0 \wedge v_0\|}{\omega}$$

(on le vérifie aussi par $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\omega} \|f \wedge f'\|$, avec $f \wedge f' = f_0 \wedge v_0$ constant).

Réponse. $f = \cos(\omega t) f_0 + \frac{\sin \omega t}{\omega} v_0$: ellipse centrée d'aire $\frac{\pi \|f_0 \wedge v_0\|}{\omega}$.

Correction de l'exercice 13 – Courbe de Bézier quadratique

a) $B(0) = P_0$, $B(1) = P_2$, $B'(t) = 2(1-t)(P_1 - P_0) + 2t(P_2 - P_1)$, donc $B'(0) = 2(P_1 - P_0)$ et $B'(1) = 2(P_2 - P_1)$: la courbe part de P_0 vers P_1 et arrive en P_2 en venant de P_1.

b) $B''(t) = 2(P_0 - 2P_1 + P_2)$ est constant : B est une trajectoire à accélération constante, arc de parabole (ou segment si cette accélération est colinéaire à la vitesse).

c) $B(t) = (2t, 2t(1-t))$, d'où avec $x = 2t$:

$$y = x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2}, \quad x \in [0, 2]$$

Réponse. Tangentes P_0P_1 et P_1P_2 aux extrémités, accélération constante : parabole ; ici $y = x - \frac{x^2}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Vitesse et accélération en coordonnées polaires

a) $u_r' = \theta' u_\theta$, $u_\theta' = -\theta' u_r$. Donc $f' = r' u_r + r\theta' u_\theta$, puis

$$f'' = r'' u_r + r'\theta' u_\theta + (r\theta')' u_\theta - r\theta'^2 u_r$$

ce qui donne la formule.

b) La composante sur u_θ est nulle : $2r'\theta' + r\theta'' = \frac{1}{r}(r^2\theta')' = 0$, donc $r^2\theta'$ est constant (loi des aires).

c) $f'' = -R\omega^2 u_r$: accélération dirigée vers le centre, de norme $R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$.

Réponse. $f'' = (r'' - r\theta'^2)u_r + \frac{1}{r}(r^2\theta')' u_\theta$; force centrale $\Rightarrow r^2\theta'$ constant ; cercle : $-R\omega^2 u_r$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le vecteur de Runge-Lenz et les coniques

a) $f' \wedge C = -\frac{1}{r^3} f \wedge (f \wedge f') = -\frac{1}{r^3}\left(\langle f, f'\rangle f - r^2 f'\right) = \frac{f'}{r} - \frac{\langle f, f'\rangle}{r^3} f$, qui est exactement $\left(\frac{f}{r}\right)'$ (dérivée d'un quotient, $r' = \frac{\langle f, f'\rangle}{r}$).

b) $A' = f' \wedge C + f' \wedge C' - \left(\frac{f}{r}\right)' = 0$, car $C' = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\langle f, f' \wedge C\rangle = \langle f \wedge f', C\rangle = \|C\|^2$ (produit mixte), et $\left\langle f, \frac{f}{r}\right\rangle = r$.

d) $\langle f, A\rangle = re\cos\theta$, donc $re\cos\theta = \|C\|^2 - r$, soit

$$r = \frac{\|C\|^2}{1 + e\cos\theta}$$

équation polaire d'une conique d'excentricité e et de foyer O : ellipse si $e < 1$, parabole si $e = 1$, hyperbole si $e > 1$ (première loi de Kepler).

Réponse. $A = f' \wedge C - \frac{f}{r}$ est constant et $r = \frac{\|C\|^2}{1 + e\cos\theta}$: conique de foyer O.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).