Plaquette 3 – Accroissements finis, Taylor et étude locale des courbes

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour une fonction vectorielle, l'égalité des accroissements finis est **fausse** : on la remplace par l'**inégalité** $\|f(b)-f(a)\| \le (b-a)\sup\|f'\|$, conséquence de $\left\|\int f'\right\| \le \int \|f'\|$. Les formules de **Taylor** (Young, reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange) restent valables. Pour l'**étude locale** d'une courbe en t_0, on cherche les deux premiers indices $p<q$ tels que $f^{(p)}(t_0)\neq 0$ et $f^{(q)}(t_0)$ non colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$: la tangente est dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ et la parité de p et q donne l'allure (point ordinaire, inflexion, rebroussement).

Exercice 1 – La corde est plus courte que l'arc

Soit $f(t)=(\cos t,\sin t)$.

a) Montrer que $\|f(t)-f(s)\|\le|t-s|$ par l'inégalité des accroissements finis.

b) Calculer exactement $\|f(t)-f(s)\|$ et en déduire l'inégalité $|\sin u|\le|u|$.

c) Y a-t-il égalité pour $t\neq s$?

Exercice 2 – Pas d'égalité des accroissements finis

Soit $f(t)=(t^2,t^3)$ sur $[0,1]$.

a) Existe-t-il $c\in\,]0,1[$ tel que $f(1)-f(0)=f'(c)$?

b) Vérifier l'inégalité des accroissements finis.

c) Pour chaque coordonnée prise séparément, trouver le c des accroissements finis.

Exercice 3 – Constante de Lipschitz d'une courbe

Soit $f(t)=(\cos t,\sin 2t)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $\|f'(t)\|_2^2$ en fonction de $u=\sin^2 t$.

b) Déterminer $\sup\|f'\|_2$ et en déduire que f est $\sqrt{5}$-lipschitzienne.

c) Montrer que $\sqrt{5}$ est la meilleure constante.

Exercice 4 – Norme de l'intégrale et cas d'égalité

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ continue, $\mathbb{R}^n$ euclidien, et $I=\int_a^b f$.

a) Si $I\neq 0$, on pose $u=\frac{I}{\|I\|}$. Montrer que $\|I\|=\int_a^b\langle f(t),u\rangle\,\mathrm{d}t\le\int_a^b\|f\|$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si $f(t)=\|f(t)\|u$ pour tout t.

c) Application : $f(t)=(\cos t,\sin t)$ sur $[0,\pi]$; calculer $\|I\|$ et $\int\|f\|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Développement limité de la cycloïde

Soit $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

a) Donner le développement de Taylor-Young de f en 0 à l'ordre 3.

b) Déterminer p et q en $t = 0$ et la nature du point.

c) Montrer que la courbe a, au voisinage de 0, l'allure de $y = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} x^{2/3}$.

Exercice 6 – Reste de Taylor pour une exponentielle de matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, une norme d'algèbre, et $F(t) = \exp(tA)$.

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour F entre 0 et $t \geq 0$.

b) En déduire $\|\exp(tA) - I - tA\| \leq \frac{t^2}{2}\|A\|^2 e^{t\|A\|}$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = 0{,}1$, avec la norme subordonnée euclidienne.

Exercice 7 – Valeur moyenne d'un mouvement circulaire

Soit $f(t) = (\cos t, \sin t)$ et $g(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t)$.

a) Calculer $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f$ et interpréter.

b) Calculer $\int_0^{2\pi} g$.

c) Montrer que $g(t)$ décrit le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$, et retrouver b).

Exercice 8 – Systèmes à coefficients antisymétriques variables

Soit $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ continue, à valeurs antisymétriques, et f une solution de $f'(t) = A(t)f(t)$.

a) Montrer que $\|f(t)\|$ est constante.

b) Deux solutions f et g ont-elles un produit scalaire constant ?

c) Exemple : $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$; vérifier que $f(t) = \left(\cos\frac{t^2}{2}, \sin\frac{t^2}{2}\right)$ est solution.

Exercice 9 – Lemme de Gronwall vectoriel

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 avec $\|f'(t)\| \leq k\|f(t)\|$ ($k > 0$, norme euclidienne).

a) Montrer que $\varphi = \|f\|^2$ vérifie $\varphi' \leq 2k\varphi$.

b) En déduire $\|f(t)\| \leq \|f(0)\| e^{kt}$.

c) Application : si $f(0) = 0$, que dire de f ? En déduire l'unicité de la solution de $f' = A(t)f$, $f(0) = f_0$, pour A continue bornée.

Exercice 10 – Point régulier et concavité

Soit $f(t) = (t + t^2, t^2 + t^3)$.

a) Calculer $f'(0)$, $f''(0)$ et déterminer p et q en 0.

b) En déduire la nature du point $f(0)$ et l'équation de la tangente.

c) De quel côté de la tangente la courbe se trouve-t-elle au voisinage de 0 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Point d'inflexion

Soit $f(t) = (t, t^3)$ et $g(t) = (t + t^3, t^3)$.

a) Déterminer p, q et la nature du point en $t = 0$ pour f.

b) Même question pour g.

c) Dessiner l'allure de la courbe de g près de l'origine (position par rapport à la tangente selon le signe de t).

Exercice 12 – Rebroussement de seconde espèce

Soit $f(t) = (t^2, t^4 + t^5)$.

a) Calculer les dérivées successives en 0 et déterminer p et q.

b) En déduire la nature du point.

c) Vérifier en étudiant $y - x^2$ selon le signe de t.

Exercice 13 – Le segment est le plus court chemin

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, de longueur $L = \int_a^b \|f'\|$.

a) Montrer que $L \geq \|f(b) - f(a)\|$.

b) Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $f'(t)$ est, pour tout t, positivement colinéaire à $f(b) - f(a)$ (supposé non nul).

c) En déduire que l'égalité impose que la trajectoire soit le segment $[f(a), f(b)]$.

Exercice 14 – Spirale logarithmique de longueur finie

Soit $f(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta}(\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \geq 0$.

a) Calculer $\|f'(\theta)\|$.

b) Calculer la longueur de la courbe pour $\theta \in [0, T]$, puis sa limite quand $T \to +\infty$.

c) Montrer que l'angle entre $f(\theta)$ et $f'(\theta)$ est constant.

Exercice 15 – Synthèse : une courbe de longueur infinie

Soit $f(t) = \left(t, t\sin\frac{1}{t}\right)$ pour $t \in]0, 1]$, prolongée par $f(0) = (0, 0)$.

a) Montrer que f est continue sur $[0, 1]$ et C^1 sur $]0, 1]$.

b) Montrer que $\|f'(t)\| \geq \frac{|\cos(1/t)|}{t} - 1$.

c) En déduire que la longueur $\int_\varepsilon^1 \|f'\|$ tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \to 0^+$ (poser $u = \frac{1}{t}$).

d) Même question pour $g(t) = \left(t, t^2\sin\frac{1}{t}\right)$: sa longueur est-elle finie ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).