Plaquette 4 – Courbes paramétrées : études globales, aires, longueurs et cinématique

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour étudier globalement une courbe paramétrée, on **réduit le domaine** grâce aux périodicités et symétries ($f(-t)$, $f(\pi - t)$, $f(t+T)$), on étudie les **points singuliers** ($f' = 0$), les **points doubles** ($f(s) = f(t)$, $s \neq t$) et les **branches infinies** (asymptote si $\frac{y}{x} \to a$ et $y - ax \to b$). Les grandeurs géométriques s'obtiennent par des intégrales : **longueur** $\int \|f'\|$ (souvent simplifiée par une formule trigonométrique de l'angle moitié), **aire** d'une courbe fermée $\frac{1}{2}\int (xy' - yx')$, **courbure** et **centre de courbure**. En cinématique, on décompose l'accélération selon la tangente et la normale.

Exercice 1 – L'astroïde

Soit $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Calculer $f'(t)$ et déterminer les points singuliers.

b) Montrer que $\|f'(t)\| = 3|\cos t \sin t|$ et calculer la longueur totale.

c) Calculer l'aire délimitée par l'astroïde.

Exercice 2 – La cardioïde en polaires

Soit la courbe polaire $r = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

a) Montrer que $\|f'(\theta)\|^2 = r^2 + r'^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$.

b) Calculer la longueur de la cardioïde.

c) Calculer l'aire qu'elle délimite.

Exercice 3 – Courbe de Lissajous et symétries

Soit $f(t) = (\sin 2t, \sin 3t)$.

a) Montrer que f est 2π-périodique et comparer $f(-t)$, $f(\pi - t)$, $f(\pi + t)$ à $f(t)$.

b) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et préciser les symétries à appliquer.

c) Déterminer les points de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ où la tangente est horizontale ou verticale.

Exercice 4 – Branches infinies

Soit $f(t) = \left(\frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3}{t-1}\right)$ pour $t \neq 1$.

a) Étudier la branche infinie quand $t \to 1$: montrer que la droite $y = x + 1$ est asymptote.

b) Étudier la branche quand $t \to +\infty$.

c) Position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $t = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Aire d'une ellipse et formule de Green

a) Montrer que, pour une courbe fermée simple parcourue dans le sens direct, $\frac{1}{2}\int (xy' - yx') = \int xy' = -\int yx'$ (intégrer par parties sur une période).

b) Calculer l'aire de l'ellipse $f(t) = (a\cos t, b\sin t)$.

c) Calculer l'aire de la boucle de $f(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ pour $t \in [-1, 1]$.

Exercice 6 – Accélération tangentielle et normale

Un point décrit la parabole $f(t) = (t, t^2)$.

a) Calculer $v(t) = \|f'(t)\|$ et $v'(t)$.

b) Calculer la courbure $\kappa(t)$, puis les accélérations tangentielle v' et normale κv^2 en $t = 1$.

c) Vérifier que $\|f'(1)\|^2 = v'(1)^2 + \left(\kappa v^2\right)^2$.

Exercice 7 – Développée de la parabole

Pour $f(t) = (t, t^2)$, on note $N(t)$ le vecteur normal unitaire direct et $C(t) = f(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$ le centre de courbure.

a) Calculer $N(t)$ et $\frac{1}{\kappa(t)}$.

b) Montrer que $C(t) = \left(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}\right)$.

c) Reconnaître la courbe décrite par C (la développée) et préciser le centre de courbure au sommet.

Exercice 8 – Spirale d'Archimède

Soit la courbe polaire $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Exprimer la longueur comme une intégrale.

b) Calculer $\int \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta$ (poser $\theta = \mathrm{sh}u$) et en déduire la longueur.

c) Calculer l'aire balayée par le rayon pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Exercice 9 – Cardioïde comme épicycloïde

Soit $f(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$.

a) Montrer que $\|f'(t)\| = 4\left|\sin\frac{t}{2}\right|$.

b) En déduire la longueur totale et les points singuliers.

c) Interpréter : courbe décrite par un point d'un cercle de rayon 1 roulant sans glisser autour d'un cercle de rayon 1.

Exercice 10 – La tractrice

Soit $f(t) = \left(t - \mathrm{th}t, \frac{1}{\mathrm{ch}t}\right)$ pour $t > 0$.

a) Calculer $f'(t)$ et montrer que $\|f'(t)\| = \mathrm{th}t$.

b) La tangente en $f(t)$ coupe l'axe des abscisses en un point $P(t)$. Montrer que la distance de $f(t)$ à $P(t)$ vaut 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Interpréter (un objet traîné au bout d'une laisse de longueur 1 dont l'autre bout suit l'axe).

Exercice 11 – Points doubles et tangentes

Soit $f(t) = (t^2, t^3 - t)$.

a) Déterminer les couples $s \neq t$ tels que $f(s) = f(t)$.

b) Donner les tangentes au point double.

c) Déterminer les points de la boucle où la tangente est horizontale.

Exercice 12 – Paramétrage par l'abscisse curviligne

Soit l'hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

a) Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \int_0^t \|f'\|$.

b) En déduire un paramétrage $g(s)$ par l'abscisse curviligne et vérifier $\|g'(s)\| = 1$.

c) Calculer $\|g''(s)\|$ et retrouver la courbure de l'hélice.

Exercice 13 – Longueur de la chaînette

Soit la chaînette $y = \mathrm{ch}x$, paramétrée par $f(x) = (x, \mathrm{ch}x)$.

a) Calculer la longueur de l'arc pour $x \in [-a, a]$.

b) Calculer la courbure en x et le rayon de courbure au sommet.

c) Montrer que le rayon de courbure vaut $\mathrm{ch}^2 x$.

Exercice 14 – La lemniscate de Bernoulli

Soit $f(t) = \left(\dfrac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \dfrac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right)$.

a) Étudier les symétries ($t \mapsto -t$, $t \mapsto \pi - t$) et réduire l'intervalle d'étude.

b) Montrer que l'origine est un point double, atteint en $t = \frac{\pi}{2}$ et $t = -\frac{\pi}{2}$.

c) Calculer $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire les tangentes à l'origine.

Exercice 15 – Synthèse : le folium de Descartes

Soit $f(t) = \left(\dfrac{3t}{1 + t^3}, \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \right)$, $t \neq -1$.

a) Vérifier que la courbe est incluse dans $\{x^3 + y^3 = 3xy\}$.

b) Étudier la branche infinie quand $t \to -1$: montrer que $x + y + 1 \to 0$.

c) Montrer que $f(t) \to (0, 0)$ quand $t \to \pm\infty$: l'origine est un point double (avec $t = 0$). Tangentes en ce point ?

d) Calculer l'aire de la boucle ($t \in [0, +\infty[$, en remarquant $y = tx$ et donc $xy' - yx' = x^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).