Plaquette 1 – Dérivation des arcs, Taylor vectoriel et courbes paramétrées

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On dérive une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles **coordonnée par coordonnée**, on utilise les règles de dérivation des produits (scalaire, vectoriel), l'**inégalité des accroissements finis** vectorielle et les formules de Taylor.

Exercice 1 – Dérivée d'une fonction vectorielle

Soit $f(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$. Calculer f', f'' et $\|f'\|$.

Exercice 2 – Norme constante

Soit $f : I \to E$ dérivable avec $\|f(t)\| = 1$ pour tout t. Montrer que $f'(t) \perp f(t)$.

Exercice 3 – Absence de Rolle vectoriel

Soit $f(t) = (\cos t,\, \sin t)$ sur $[0\,;2\pi]$. Vérifier que $f(0) = f(2\pi)$ et que f' ne s'annule jamais.

Exercice 4 – Inégalité des accroissements finis

Soit $f(t) = \left(\mathrm{e}^{t},\, \sin t\right)$ sur $[0\,;1]$. Majorer $\|f(1) - f(0)\|_2$ par l'IAF et comparer à la valeur exacte.

Exercice 5 – Produit vectoriel

Soient $f(t) = (t,\, t^2,\, 1)$ et $g(t) = (1,\, 0,\, t)$. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \wedge g)$ de deux façons.

Exercice 6 – Longueur d'arc

Calculer la longueur de l'hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pour $t \in [0\,;2\pi]$.

Exercice 7 – Taylor vectoriel

Écrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 de $f(t) = \left(\mathrm{e}^{t},\, \cos t\right)$.

Exercice 8 – Mouvement à accélération centrale

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 telle que $f''(t)$ soit colinéaire à $f(t)$ pour tout t. Montrer que $f \wedge f'$ est constant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Intégrale d'une fonction vectorielle

Calculer $\int_0^{\pi} (\cos t,\ \sin t,\ t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier l'inégalité $\left\|\int f\right| \le \int \|f\|$.

Exercice 10 – Courbe paramétrée

Étudier la courbe $f(t) = \left(t^2,\ t^3\right)$ au voisinage de $t = 0$: point régulier ou singulier ?

Exercice 11 – Fonction à valeurs matricielles

Soit $M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Calculer $M'(t)$ et vérifier que $M'(t) = JM(t)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 – Inégalité de Taylor-Lagrange vectorielle

Soit $f(t) = (\cos t, \sin t)$ et $T_2(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2}, t\right)$ son polynôme de Taylor d'ordre 2 en 0.

a) Justifier que $\|f(t) - T_2(t)\|_2 \le \frac{|t|^3}{6} \sup \|f''\|_2$, et calculer ce sup.

b) En déduire une majoration de l'erreur pour $|t| \le 0{,}1$.

c) Comparer à l'erreur réelle en $t = 0{,}1$.

Exercice 13 – Longueur d'une arche de cycloïde

Soit $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, trajectoire d'un point d'une roue de rayon 1.

a) Calculer $f'(t)$ et montrer que $\|f'(t)\| = 2\left|\sin \frac{t}{2}\right|$.

b) Quels sont les points singuliers ?

c) Calculer la longueur d'une arche ($t \in [0, 2\pi]$).

Exercice 14 – Courbure d'une courbe plane

Pour une courbe plane régulière $f = (x, y)$ de classe C^2, on définit la courbure $\kappa = \dfrac{\det(f', f'')}{\|f'\|^3}$.

a) Calculer κ pour le cercle $f(t) = (R\cos t, R\sin t)$.

b) Calculer κ pour la parabole $f(t) = (t, t^2)$, en particulier en $t = 0$.

c) Montrer que κ ne dépend pas d'un reparamétrage croissant $t = \varphi(u)$.

Exercice 15 – Synthèse : mouvement circulaire

Un point mobile a pour position $f(t) = (R\cos(\omega t),\ R\sin(\omega t))$.

a) Calculer vitesse et accélération.

b) Montrer que l'accélération est **centripète** et donner sa norme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).