Plaquette 2 – Dérivation des fonctions vectorielles : produits, normes et matrices

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Une fonction à valeurs dans un espace de dimension finie se dérive **coordonnée par coordonnée** dans une base fixe, mais il est souvent plus efficace d'utiliser la règle générale : si B est **bilinéaire** (produit scalaire, produit vectoriel, déterminant 2×2, produit matriciel), alors $(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$; pour une application k-linéaire, on obtient k termes. On en déduit la dérivée de $\|f\|$, de $\det M(t)$, de $M(t)^{-1}$, de $M(t)^k$ (attention à l'ordre des facteurs !), et des **invariants** : une quantité de dérivée nulle est constante.

Exercice 1 – Dérivée de la norme

Soit $f(t) = (t, t^2)$ dans $\mathbb{R}^2$ euclidien.

a) Montrer que, là où f ne s'annule pas, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f(t)\| = \dfrac{\langle f(t), f'(t)\rangle}{\|f(t)\|}$.

b) Calculer cette dérivée pour $t > 0$ et vérifier par un calcul direct.

c) $t \mapsto \|f(t)\|$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 – Dérivée d'un déterminant et loi des aires

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^2$ dérivables.

a) Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det(f,g) = \det(f',g) + \det(f,g')$.

b) Si f est de classe C^2 et $f'(t)$ colinéaire à $f(t)$ pour tout t, montrer que $\det(f,f')$ est constant.

c) Interpréter pour un mouvement à force centrale.

Exercice 3 – Dérivée du déterminant d'une matrice

Soit $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t^2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det M(t)$ et sa dérivée.

b) Vérifier la formule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det M = \operatorname{tr}\left(\operatorname{com}(M)^{\mathsf{T}} M'\right)$.

c) En déduire, pour M inversible, $\dfrac{(\det M)'}{\det M} = \operatorname{tr}(M^{-1}M')$, et l'appliquer à $M(t) = \exp(tA)$.

Exercice 4 – Dérivée de l'inverse d'une matrice

Soit $M : I \to GL_n(\mathbb{R})$ dérivable.

a) En dérivant $M(t)M(t)^{-1} = I$, montrer que $(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}$ (on admet que $t \mapsto M(t)^{-1}$ est dérivable).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Vérifier sur $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pour $n = 1$, que retrouve-t-on ?

Exercice 5 – Dérivée d'une puissance de matrice

Soit $M(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $M(t)^2$ et sa dérivée.

b) Comparer avec $2M(t)M'(t)$ et avec $M'M + MM'$.

c) À quelle condition a-t-on $(M^k)' = kM^{k-1}M'$?

Exercice 6 – Courbes dans le groupe orthogonal

Soit $M : \mathbb{R} \to O(n)$ dérivable.

a) Montrer que $M(t)^{\mathsf{T}} M'(t)$ est antisymétrique.

b) Si $M(0) = I$, en déduire que $M'(0)$ est antisymétrique.

c) Vérifier sur $M(t) = R_t$ (rotation d'angle t du plan).

Exercice 7 – Point le plus proche et orthogonalité

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable, $a \in \mathbb{R}^n$, et t_0 intérieur à I où $\|f(t) - a\|$ est minimale.

a) Montrer que $\langle f'(t_0), f(t_0) - a \rangle = 0$.

b) Application : distance de l'origine à la droite $f(t) = (1 + t, 2 - t, t)$.

c) Justifier l'existence du minimum dans b).

Exercice 8 – Conservation de l'énergie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 solution de $f'' + Af = 0$, où A est symétrique.

a) Montrer que $E(t) = \|f'(t)\|^2 + \langle Af(t), f(t) \rangle$ est constante.

b) Si A est définie positive, en déduire que f est bornée.

c) Exemple : $A = \mathrm{diag}(1, 4)$, $f(0) = (1, 0)$, $f'(0) = (0, 2)$; expliciter f et vérifier.

Exercice 9 – Régularité d'une fonction définie par morceaux

Soit $f(t) = \left(t|t|, |t|^3 \right)$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.

b) f est-elle de classe C^2 ?

c) Le point $f(0)$ est-il régulier ?

Exercice 10 – Moment cinétique et produit vectoriel

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2.

a) Montrer que $(f \wedge f')' = f \wedge f''$.

b) Calculer $f \wedge f'$ et $f \wedge f''$ pour l'hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Si $f \wedge f'$ est constant non nul, montrer que la trajectoire est plane.

Exercice 11 – La clothoïde

Soit $F(x) = \int_0^x \left(\cos(t^2), \sin(t^2)\right) \mathrm{d}t$.

a) Calculer $F'(x)$ et montrer que F est paramétrée par l'abscisse curviligne.

b) Calculer la courbure $\kappa(x) = \det(F'(x), F''(x))$ (car $\|F'\| = 1$).

c) Interpréter : pourquoi cette courbe sert-elle à raccorder une ligne droite et un virage ?

Exercice 12 – Courbure et torsion de l'hélice

Soit $f(t) = (\cos t, \sin t, at)$ avec $a > 0$.

a) Calculer f', f'', f''' et $f' \wedge f''$.

b) Calculer la courbure $\kappa = \dfrac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3}$.

c) Calculer la torsion $\tau = \dfrac{\det(f', f'', f''')}{\|f' \wedge f''\|^2}$, et étudier les cas limites $a \to 0$ et $a \to +\infty$.

Exercice 13 – Rotation à vitesse angulaire constante

Soit $\omega \in \mathbb{R}^3$ non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ solution de $f' = \omega \wedge f$.

a) Montrer que $\|f\|$ et $\langle f, \omega \rangle$ sont constants.

b) En déduire que la trajectoire est contenue dans un cercle (ou réduite à un point).

c) Expliciter f pour $\omega = (0, 0, 1)$ et $f(0) = (1, 0, 2)$.

Exercice 14 – Une fonction à valeurs polynomiales

Soit $n \geq 1$ et $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_n[X]$, $t \mapsto (X - t)^n$.

a) Écrire les coordonnées de $P(t)$ dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$, et en déduire que P est dérivable avec $P'(t) = -n(X - t)^{n-1}$.

b) Calculer $\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Vérifier le résultat de b) sur le coefficient constant.

Exercice 15 – Synthèse : repère de Frenet et courbure de l'ellipse

Soit f une courbe plane régulière de classe C^2, $v = \|f'\|$, $T = \dfrac{f'}{v}$ et N l'image de T par la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $T' = \kappa v N$ et $N' = -\kappa v T$, avec $\kappa = \dfrac{\det(f', f'')}{v^3}$.

b) Pour l'ellipse $f(t) = (a\cos t, b \sin t)$ $(a > b > 0)$, calculer $\kappa(t)$.

c) Déterminer les points de courbure maximale et minimale, et les rayons de courbure correspondants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).