Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : cinématique et équations différentielles vectorielles

Fonctions vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les problèmes de mécanique se ramènent à une **équation différentielle vectorielle** $f'' = F(f, f')$. Avant de résoudre, on cherche des **invariants** : on dérive une quantité bien choisie (moment cinétique $f \wedge f'$, énergie, vecteur de Runge-Lenz) et l'on montre que sa dérivée est nulle grâce aux règles de dérivation des produits. Ces invariants donnent la géométrie de la trajectoire (plane, circulaire, conique) sans résoudre complètement. Quand l'équation est linéaire à coefficients constants, on la résout explicitement, coordonnée par coordonnée ou avec l'exponentielle de matrice.

Exercice 1 – Lois de conservation du problème de Kepler

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de classe C^2 telle que $f'' = -\dfrac{f}{\|f\|^3}$.

a) Montrer que le moment cinétique $C = f \wedge f'$ est constant, et que le mouvement est plan si $C \neq 0$.

b) Montrer que l'énergie $E = \dfrac{1}{2}\|f'\|^2 - \dfrac{1}{\|f\|}$ est constante.

c) En déduire que si $E < 0$, la trajectoire reste dans la boule de rayon $\dfrac{1}{|E|}$.

Exercice 2 – Orbites circulaires et troisième loi de Kepler

On cherche des solutions de $f'' = -\dfrac{f}{\|f\|^3}$ de la forme $f(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$, $R > 0$, $\omega > 0$.

a) Montrer que c'est le cas si et seulement si $\omega^2 R^3 = 1$.

b) En déduire la relation entre la période T et le rayon R.

c) Calculer l'énergie E et le moment cinétique pour cette orbite.

Exercice 3 – Chute avec frottement linéaire

Un projectile vérifie $f'' = -g e_2 - k f'$ dans $\mathbb{R}^2$ ($g, k > 0$), avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = v_0$.

a) Résoudre l'équation en $v = f'$ (équation linéaire du premier ordre).

b) En déduire $f(t)$.

c) Déterminer la vitesse limite et l'abscisse limite atteinte quand $t \to +\infty$ (pour $v_0 = (a, b)$).

Exercice 4 – Particule chargée dans un champ magnétique

Soit $B = \omega e_3$ ($\omega > 0$) et f solution de $f'' = f' \wedge B$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que $\|f'\|$ et $\langle f', e_3 \rangle$ sont constants.

b) En écrivant $v = f' = (v_1, v_2, v_3)$, montrer que $v_1' = \omega v_2$, $v_2' = -\omega v_1$, et résoudre.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que la trajectoire est une hélice d'axe parallèle à e_3 ; préciser son rayon.

Exercice 5 – Système affine et équilibre

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, et $f' = Af + b$, $f(0) = f_0$.

a) Montrer que $g = f + A^{-1}b$ vérifie $g' = Ag$, et en déduire $f(t) = \exp(tA)(f_0 + A^{-1}b) - A^{-1}b$.

b) Si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0 et A diagonalisable, montrer que $f(t) \to -A^{-1}b$.

c) Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $b = (1, 4)$, $f_0 = 0$.

Exercice 6 – Courbes coupant les rayons sous un angle constant

On cherche les courbes polaires $r = r(\theta) > 0$ telles que l'angle $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ entre u_r et f' soit constant.

a) Montrer que $\tan\alpha = \frac{r}{r'}$ (là où $r' \neq 0$).

b) En déduire $r(\theta) = r_0 e^{\theta / \tan\alpha}$.

c) Calculer la longueur de l'arc pour $\theta \in]-\infty, 0]$.

Exercice 7 – La développante du cercle

Soit $f(t) = (\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t)$ pour $t \geq 0$ (un fil déroulé d'une bobine de rayon 1).

a) Calculer $f'(t)$ et $\|f'(t)\|$.

b) Calculer la longueur de l'arc pour $t \in [0, T]$.

c) Montrer que $f(t) - (\cos t, \sin t)$ est tangent au cercle unité en $(\cos t, \sin t)$, de longueur t, et orthogonal à $f'(t)$.

Exercice 8 – Les courbes de courbure constante

Soit f une courbe plane paramétrée par l'abscisse curviligne ($\|f'\| = 1$), de classe C^2, de courbure constante $\kappa > 0$, avec $T = f'$, N la normale directe, $T' = \kappa N$, $N' = -\kappa T$.

a) Montrer que $C = f + \frac{1}{\kappa}N$ est constant.

b) En déduire que f est contenue dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Que dire si $\kappa = 0$?

Exercice 9 – Dérivée colinéaire à la fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $\lambda : I \to \mathbb{R}$ continue avec $f'(t) = \lambda(t) f(t)$, $0 \in I$.

a) Montrer que $g(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda\right) f(t)$ est constante.

b) En déduire que la trajectoire de f est contenue dans la demi-droite $\mathbb{R}_+^* f(0)$ (si $f(0) \neq 0$) ou réduite à $\{0\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose seulement $f'(t)$ colinéaire à $f(t)$ pour tout t, sans continuité de λ ?

Exercice 10 – Mouvement à vitesse de norme constante

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2.

a) Montrer que $\|f\|$ est constante si et seulement si $f'(t) \perp f(t)$ pour tout t.

b) Vérifier sur le mouvement circulaire uniforme et sur l'hélice.

c) Donner un exemple de mouvement de vitesse de norme constante dont l'accélération n'est pas centripète (dirigée vers un point fixe).

Exercice 11 – Distance minimale entre deux mobiles

Deux mobiles ont pour positions $f(t) = (t, 0)$ et $g(t) = (1, 2 - t)$.

a) Calculer $d(t)^2 = \|f(t) - g(t)\|^2$.

b) Déterminer l'instant et la valeur de la distance minimale.

c) Vérifier qu'en cet instant, $f - g$ est orthogonal à la vitesse relative $f' - g'$.

Exercice 12 – Oscillateur harmonique vectoriel

Soit $f'' = -\omega^2 f$ dans $\mathbb{R}^3$, avec $f(0) = f_0$ et $f'(0) = v_0$ non colinéaires.

a) Montrer que $f(t) = \cos(\omega t) f_0 + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} v_0$.

b) En déduire que la trajectoire est une ellipse centrée en 0, dans le plan engendré par f_0 et v_0.

c) Montrer que l'aire de cette ellipse vaut $\frac{\pi \|f_0 \wedge v_0\|}{\omega}$.

Exercice 13 – Courbe de Bézier quadratique

Pour trois points P_0, P_1, P_2 du plan, on pose $B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$, $t \in [0, 1]$.

a) Calculer $B(0)$, $B(1)$, $B'(0)$, $B'(1)$ et interpréter.

b) Calculer $B''(t)$ et en déduire que B est un arc de parabole (ou un segment).

c) Pour $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 0)$, expliciter $B(t)$ et l'équation de la courbe.

Exercice 14 – Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Soit $f = r u_r$ avec r et θ de classe C^2.

a) Établir $f' = r' u_r + r\theta' u_\theta$ et $f'' = (r'' - r\theta'^2) u_r + (2r'\theta' + r\theta'') u_\theta$.

b) Pour un mouvement à accélération centrale ($f'' \parallel u_r$), montrer que $r^2\theta'$ est constant.

c) Pour le mouvement circulaire uniforme ($r = R$, $\theta' = \omega$), retrouver l'accélération centripète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : le vecteur de Runge-Lenz et les coniques

On reprend $f' = -\dfrac{f}{\|f\|^3}$, $C = f \wedge f' \neq 0$ constant, et on pose $r = \|f\|$ et $A = f' \wedge C - \dfrac{f}{r}$.

a) Montrer que $f' \wedge C = -\dfrac{1}{r^3} f \wedge (f \wedge f')$, puis, avec le double produit vectoriel, que $f' \wedge C = \left(\dfrac{f}{r}\right)'$.

b) En déduire que A est constant.

c) Montrer que $\langle f, A \rangle = \|C\|^2 - r$.

d) En notant $e = \|A\|$ et θ l'angle entre f et A, en déduire $r = \dfrac{\|C\|^2}{1 + e\cos\theta}$: la trajectoire est une conique de foyer l'origine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).