Plaquette 1 – Continuité, dérivation sous l'intégrale et fonction Gamma

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cadre. $F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, avec x dans un intervalle J et t dans I.

Théorème de continuité. Si

— pour chaque x, $t \mapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux et intégrable** sur I ;

— pour chaque t, $x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur J ;

— **domination** : il existe φ **intégrable** sur I, indépendante de x, avec $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$;

alors F est **continue** sur J.

Théorème de dérivation. Si, en plus,

— $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en x, continue par morceaux en t ;

— **domination de la dérivée** : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$ avec ψ intégrable ;

alors F est de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Domination locale. Il suffit de dominer **sur tout segment** $[a\,;b] \subset J$ (ou sur un voisinage de chaque point) : la continuité et la dérivabilité sont des propriétés **locales**.

Fonction Gamma.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad (x>0)$$

— $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; $\Gamma(1)=1$; $\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

— Γ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et **convexe**.

Théorème de convergence dominée (version suites) : $f_n \to f$ simplement, $|f_n| \leq \varphi$ intégrable $\Rightarrow \int f_n \to \int f$.

Correction de l'exercice 1 – Continuité sous l'intégrale

— **Définition** : pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$, $1 + xt \geq 1$, donc

$$0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \leq \mathrm{e}^{-t}$$

— La fonction $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}$ est **intégrable** sur $[0\,;+\infty[$ (d'intégrale 1) et **ne dépend pas de** x : c'est notre domination.

— F est donc **définie** sur $[0\,;+\infty[$.

— **Continuité en** x : pour t fixé, $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

— Les trois hypothèses du **théorème de continuité** sont réunies : F est **continue**.

— **Valeurs particulières** : $F(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1$, et $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ (convergence dominée).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Domination par e^{-t} : F est définie et continue, avec $F(0) = 1$.

Correction de l'exercice 2 – Dérivation sous l'intégrale

Définition. Pour $x > 0$, e^{-xt^2} est intégrable (décroissance gaussienne), et le changement $u = t\sqrt{x}$ donne $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Dérivation. Fixons $0 < a \leq x$ (domination **locale**).

— $\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{e}^{-xt^2} = -t^2 \mathrm{e}^{-xt^2}$.

— **Domination** sur $[a\,;+\infty[$: $\left|-t^2 \mathrm{e}^{-xt^2}\right| \leq t^2 \mathrm{e}^{-at^2}$, fonction intégrable et indépendante de x ✓

— Le théorème s'applique : F est C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-xt^2} \mathrm{d}t$$

— **Vérification par la formule explicite** : $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^{-1/2}$, donc $F'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} x^{-3/2}$.

— On en déduit au passage $\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-xt^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4x^{3/2}}$ ✓

— **Point crucial** : la domination doit être **indépendante de** x, d'où la restriction à $[a\,;+\infty[$ — sur $]0\,;+\infty[$ tout entier, aucune domination globale n'existe.

Réponse. $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ et $F'(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4x^{3/2}}$.

Correction de l'exercice 3 – Fonction Gamma

Convergence. Deux points à examiner.

— **En** 0 : $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \sim t^{x-1}$, intégrable $\Leftrightarrow 1 - x < 1$, soit $x > 0$ ✓

— **En** $+\infty$: $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ✓

— Γ est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.

Relation fonctionnelle. IPP avec $u' = \mathrm{e}^{-t}$ et $v = t^x$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

— Le crochet est **nul** : en 0 car $x > 0$, en $+\infty$ par croissances comparées.

— Donc $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

— **Conséquence** : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = 1$, puis par récurrence $\Gamma(n+1) = n!$ — Γ **interpole la factorielle**.

— **Valeur remarquable** : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1{,}7725$ (via l'intégrale de Gauss).

Réponse. Définie pour $x > 0$; IPP donne $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Correction de l'exercice 4 – Convergence dominée

— **Limite simple** : pour t fixé, $\frac{t}{n} \to 0$, donc $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + \frac{t}{n}} \to \mathrm{e}^{-t}$.

— **Domination** : $\left|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + \frac{t}{n}}\right| \leq \mathrm{e}^{-t}$ pour tous $n \geq 1$ et $t \geq 0$, et e^{-t} est **intégrable** ✓

— Le **théorème de convergence dominée** s'applique :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\frac{t}{n}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1$$

— **Contrôle numérique** : pour $n=100$, l'intégrale vaut environ 0,99 ✓
— **Rôle de la domination** : sans elle, la limite peut ne pas passer. Exemple : $f_n=n\mathbf{1}_{[0;1/n]}$ tend simplement vers 0 alors que $\int f_n=1$ pour tout n.

Réponse. La limite vaut 1.

Correction de l'exercice 5 – Interversion série-intégrale

— **Développement** : pour $t\in]0;1[$, $\frac{1}{1-t}=\sum_{n\geq 0}t^n$.
— L'intégrande devient $\sum_{n\geq 0}(-t^n\ln t)$, tous les termes étant **positifs** sur $]0;1[$.
— **Interversion** (série à termes positifs, théorème de sommation terme à terme) :

$$\int_0^1\frac{-\ln t}{1-t}\mathrm{d}t=\sum_{n\geq 0}\int_0^1(-t^n\ln t)\,\mathrm{d}t$$

— **Calcul du terme général** par IPP : $\int_0^1 t^n\ln t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{(n+1)^2}$.
— Donc l'intégrale vaut $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
— **Valeur** : $\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}6449$.
— **Contrôle numérique** : une intégration numérique donne $\approx 1{,}645$ ✓

Réponse. $\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}645$.

Correction de l'exercice 6 – Équation différentielle vérifiée par F

Dérivation. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\right)=-2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)$.

— **Domination** : $\left|-2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\right|\leq 2t\mathrm{e}^{-t^2}$, intégrable et indépendante de x ✓
— Donc F est C^1 et $F'(x)=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\,\mathrm{d}t$.

IPP avec $u'=2t\mathrm{e}^{-t^2}$ (donc $u=-\mathrm{e}^{-t^2}$) et $v=\sin 2xt$:

$$F'(x)=\Big[\mathrm{e}^{-t^2}\sin(2xt)\Big]_0^{+\infty}-2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t=0-2xF(x)$$

Résolution. $F'=-2xF$ donne $F(x)=F(0)\mathrm{e}^{-x^2}$.
— Or $F(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
— **Conclusion** : $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.
— **Contrôle** : $F(1)\approx 0{,}8862\times 0{,}3679\approx 0{,}3260$; l'intégration numérique donne la même valeur ✓
— **Portée** : la gaussienne est sa **propre transformée de Fourier** — ce calcul en est la démonstration élémentaire.

Réponse. $F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Continuité d'une intégrale à bornes variables

— La fonction $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se **prolonge par continuité** en 0 avec $h(0) = 1$ (car $\sin t \sim t$).

— h est donc **continue** sur $\mathbb{R}$.

— Le **théorème fondamental de l'analyse** s'applique : G est de classe C^1 et

$$G'(x) = h(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0), \qquad G'(0) = 1$$

— **Variations** : $G' > 0$ sur $]0\,;\pi[$, puis change de signe à chaque multiple de π — G oscille en convergeant.

— **Maximum** : atteint en $x = \pi$, avec $G(\pi) \approx 1{,}852$ (phénomène de Gibbs).

— **Limite** : $G(x) \to \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}571$ quand $x \to +\infty$ (intégrale de Dirichlet).

— **Attention** : ici c'est la **borne** qui varie, pas un paramètre dans l'intégrande — c'est le théorème fondamental qui s'applique, pas celui de dérivation sous l'intégrale.

Réponse. G est C^1 avec $G'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (et $G'(0) = 1$).

Correction de l'exercice 8 – Domination locale

— **Valeur explicite** : pour $x > 0$, $F(x) = \dfrac{1}{x}$.

— **Domination globale impossible** : si $\left|\mathrm{e}^{-xt}\right| \leq \varphi(t)$ pour **tout** $x > 0$, alors en faisant $x \to 0^+$ on obtiendrait $\varphi(t) \geq 1$ pour tout t — et une telle φ n'est **pas intégrable** sur $[0\,;+\infty[$.

— **Domination locale** : sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$, on a $\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$, **intégrable** ✓

— Cela suffit à conclure : F est continue (et C^∞) sur $]0\,;+\infty[$, car la continuité est une propriété **locale**.

— **Cohérence** : $F(x) = \dfrac{1}{x} \to +\infty$ en 0^+ — le théorème ne pouvait pas s'appliquer jusqu'en 0, la fonction n'y est même pas définie.

— **Règle pratique** : toujours annoncer « soit $[a\,;b] \subset J$, dominons sur ce segment » — c'est la formulation attendue.

Réponse. Aucune domination globale n'existe ; sur $[a\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$ suffit.

Correction de l'exercice 9 – Calcul par dérivation

Intégrabilité. En 0 l'intégrande tend vers 0 ; en 1, $\dfrac{t^x - 1}{\ln t} \to x$ (taux de variation) — la fonction se **prolonge par continuité**, donc est intégrable sur $[0\,;1]$.

Dérivation. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{t^x - 1}{\ln t}\right) = \dfrac{t^x \ln t}{\ln t} = t^x$.

— **Domination** sur $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$: $|t^x| \leq 1$, intégrable sur $[0\,;1]$ ✓

$$F'(x) = \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

Intégration. $F(x) = \ln(x+1) + C$.

— **Constante** : $F(0) = \int_0^1 \dfrac{1-1}{\ln t}\mathrm{d}t = 0$, et $\ln 1 = 0$, donc $C = 0$.

— **Conclusion** : $F(x) = \ln(x+1)$.

— **Contrôle** : $F(1) = \int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t$ devrait valoir $\ln 2 \approx 0{,}693$; l'intégration numérique le confirme ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Méthode type** : dériver sous l'intégrale pour **simplifier** l'intégrande, intégrer l'équation obtenue, fixer la constante par une valeur particulière.

Réponse. $F'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $F(x) = \ln(x+1)$.

Correction de l'exercice 10 – Régularité C-infini

Dérivées successives. Formellement, $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

— **Domination** sur $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$: pour $x \in [a\,;b]$,

$$\left|(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right| \leq |\ln t|^k \left(t^{a-1} + t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}$$

— Cette majorante est **intégrable** : en 0 car $|\ln t|^k t^{a-1} = o\left(t^{a/2-1}\right)$ avec $\frac{a}{2} < 1$; en $+\infty$ par croissances comparées.

— Par récurrence, Γ est de classe C^∞ et la formule ci-dessus est valide.

Convexité. $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

— L'intégrande est **positif** (carré) et non identiquement nul, donc $\Gamma''(x) > 0$: Γ est **strictement convexe**.

— **Conséquence** : Γ admet un **unique minimum** sur $]0\,;+\infty[$, atteint vers $x \approx 1{,}4616$, où $\Gamma \approx 0{,}8856$.

— **Contrôle** : $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, donc le minimum est bien **entre** 1 et 2 ✓ (Rolle appliqué à Γ').

Réponse. Domination des dérivées ; $\Gamma'' > 0$ car l'intégrande est un carré.

Correction de l'exercice 11 – Limite d'une intégrale à paramètre

— **Limite simple** de l'intégrande : pour $t \in [0\,;1[$, $t^x \to 0$ donc l'intégrande tend vers 1 ; en $t = 1$, il vaut $\dfrac{1}{2}$.

— La limite simple est donc la fonction valant 1 sur $[0\,;1[$ (le point $t = 1$ ne change pas l'intégrale).

— **Domination** : $0 \leq \dfrac{1}{1+t^x} \leq 1$, et la constante 1 est intégrable sur le **segment** $[0\,;1]$ ✓

— **Convergence dominée** :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x} = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1$$

— **Contrôle numérique** : pour $x = 10$, l'intégrale vaut environ 0,938 ; pour $x = 100$, environ 0,993 ✓

— **Remarque** : sur un **segment**, la domination par une constante suffit toujours — c'est le cas le plus simple d'application du théorème.

Réponse. La limite vaut 1.

Correction de l'exercice 12 – L'intégrale de Dirichlet par un paramètre

a) $h(x,t) = \mathrm{e}^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ et $\partial_x h = -\mathrm{e}^{-xt}\sin t$ sont continues ; sur $[a, +\infty[$ $(a > 0)$, $|h| \leq \mathrm{e}^{-at}$ et $|\partial_x h| \leq \mathrm{e}^{-at}$, intégrables. Dérivation sous l'intégrale, puis $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t \,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\dfrac{1}{x-i} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leq 1$, donc

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Ainsi $F(x) = -\arctan x + C$ et $C = \frac{\pi}{2}$ (limite en $+\infty$).

c) $F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – Une intégrale calculée par sa dérivée

a) En 0 : $\frac{1-\cos(xt)}{t} \sim \frac{x^2 t}{2} \to 0$. En $+\infty$: majoration par $2\mathrm{e}^{-t}$.

b) $\partial_x\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{1-\cos xt}{t}\right) = \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)$, majorée par e^{-t} indépendamment de x : domination globale, dérivation sous l'intégrale.

c) $F'(x) = \mathrm{Im}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\frac{1}{1-ix} = \frac{x}{1+x^2}$, et $F(0) = 0$, donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Réponse. $F'(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et $F(0) = 0$: $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Correction de l'exercice 14 – Logarithme d'une forme quadratique trigonométrique

a) Sur $[a,b] \subset]0,+\infty[$, l'intégrande est continue sur le compact $[a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ainsi que sa dérivée partielle en x : dérivation sous l'intégrale (segment).

b) $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, $\sin^2 t = \frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 t = \frac{1}{1+u^2}$. Puis, pour $x \neq 1$,

$$\frac{u^2}{(1+u^2)(1+x^2u^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x^2u^2}\right)$$

d'où $F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi(x-1)}{x^2-1} = \frac{\pi}{1+x}$ (et par continuité en $x = 1$).

c) $F(1) = 0$, donc $F(x) = \pi\ln(1+x) - \pi\ln 2$.

Réponse. $F'(x) = \frac{\pi}{1+x}$, $F(1) = 0$: $F(x) = \pi\ln\frac{1+x}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : transformée de Laplace

a) - **Majoration** : $\left|\mathrm{e}^{-xt}\sin t\right| \leq \mathrm{e}^{-xt}$, intégrable pour $x > 0$.

— L'intégrale **converge absolument** ; sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$, la domination par e^{-at} assure la **continuité** de F.

b) **Double IPP.** Notons $I = F(x)$.

— Première IPP ($u' = \mathrm{e}^{-xt}$, $v = \sin t$) :

$$I = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}J$$

— Seconde IPP sur J :

$$J = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}\cos t}{x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \frac{I}{x}$$

— **Résolution** : $I = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{I}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{I}{x^2}$, donc $I\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}$.

$$F(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôles** : $F(1) = \dfrac{1}{2}$; l'intégration numérique de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ donne bien 0,5 ✓

— $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ ✓ et $F(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$ — cohérent avec $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}$… mais attention, en $x = 0$ l'intégrale ne converge plus absolument.

— **Portée** : F est la **transformée de Laplace** de sin, outil central en automatique et en traitement du signal.

Réponse. b) $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).