Plaquette 2 – Continuité, limites et équivalents d'intégrales à paramètre

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Continuité. $h(\cdot,t)$ continue pour presque tout t, $h(x,\cdot)$ continue par morceaux, et $|h(x,t)|\leq\varphi(t)$ intégrable pour x dans tout segment (ou compact) de $J\Rightarrow F$ continue sur J.

Limite. Si $h(x,t)\to\ell(t)$ quand $x\to a$ et $|h(x,t)|\leq\varphi(t)$ intégrable au voisinage de a, alors

$$\lim_{x\to a}\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$$

Changement d'échelle. $\int_0^{+\infty} g(xt)f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g(u)f(\frac{u}{x})\mathrm{d}u$: utile pour $x\to+\infty$ ou 0^+.

Correction de l'exercice 1 – Une intégrale de puissances sur un segment

a) En 0, $\frac{t^x}{1+t}\sim t^x$: convergence $\Leftrightarrow x>-1$. Sur $[a,+\infty[$ $(a>-1)$, $\left|\frac{t^x}{1+t}\right|\leq t^a$, intégrable : continuité. Pour $t\in\,]0,1[$, $x\mapsto t^x$ décroît, donc F aussi.

b) $F(x)+F(x+1)=\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}$. Par décroissance,

$$2F(x+1)\leq\frac{1}{x+1}\leq 2F(x)$$

d'où $\frac{1}{2(x+1)}\leq F(x)\leq\frac{1}{2x}$ et $F(x)\sim\frac{1}{2x}$.

c) $F(x)=\frac{1}{x+1}-F(x+1)$ avec $F(x+1)\to F(0)=\ln 2$: $F(x)\sim\frac{1}{x+1}$ en -1^+.

Réponse. F continue décroissante sur $]-1,+\infty[$, $F(x)+F(x+1)=\frac{1}{x+1}$, $F\sim\frac{1}{2x}$ en $+\infty$, $\sim\frac{1}{x+1}$ en -1^+.

Correction de l'exercice 2 – Transformée de Laplace d'une fraction

a) $\left|\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\right|\leq\frac{1}{1+t^2}$ pour tout $x\geq 0$: domination globale, continuité. $F(0)=\frac{\pi}{2}$.

b) $0\leq F(x)\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$.

c) $xF(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{1+u^2/x^2}\,\mathrm{d}u$; l'intégrande tend vers e^{-u} et est dominée par e^{-u}, d'où

$$xF(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=1$$

Réponse. F continue, $F(0)=\frac{\pi}{2}$, $F(x)\sim\frac{1}{x}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 3 – Fonction gamma incomplète en zéro

a) $\mathrm{e}^{-1}\leq\mathrm{e}^{-t}\leq 1$ sur $[0,1]$ et $\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$.

b) $u=t^x$, $\mathrm{d}u=xt^{x-1}\,\mathrm{d}t$, $t=u^{1/x}$. Pour $u\in[0,1[$, $u^{1/x}\to 0$ quand $x\to 0^+$, donc $\mathrm{e}^{-u^{1/x}}\to 1$; domination par 1 :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$x\gamma(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

c) $\Gamma(x) = \gamma(x) + \int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, et le second terme reste borné (par $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}$) pour $x \le 1$. Donc $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ (cohérent avec $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$).

Réponse. $x\gamma(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-u^{1/x}}\,\mathrm{d}u \to 1$: $\gamma(x) \sim \Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+.

Correction de l'exercice 4 – Une représentation intégrale de Bessel

a) Intégrande continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ et bornée par 1 : continuité (domination par 1 sur le segment). cos est paire.

b) ∂_x^k de l'intégrande est bornée par $\sin^k t \le 1$: $F \in C^\infty$. $F(0) = \pi$; $F'(0) = -\int_0^\pi \sin t \sin(0)\,\mathrm{d}t = 0$; $F''(0) = -\int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}$.

c) $\cos(x\sin t) = \sum \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$, convergence normale en t pour x fixé :

$$F(x) = \pi\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k\binom{2k}{k}}{4^k(2k)!}x^{2k} = \pi\sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k} = \pi J_0(x)$$

Réponse. F continue, paire, C^∞, $F(0)=\pi$, $F''(0) = -\frac{\pi}{2}$; $F = \pi J_0$.

Correction de l'exercice 5 – Domination sur une demi-droite

a) Intégrande continue positive ; en $+\infty$, équivalente à t^{-x} (si $x>0$) : convergence $\Leftrightarrow x>1$ (pour $x\le 0$, divergence grossière).

b) Pour $x \ge a > 1$: sur $[0,1]$, $\frac{1}{1+t^x} \le 1$; sur $[1,+\infty[$, $t^x \ge t^a$ donc $\frac{1}{1+t^x} \le \frac{1}{t^a}$. La fonction $\varphi = 1_{[0,1]} + t^{-a}1_{[1,+\infty[}$ est intégrable et domine : continuité sur $[a,+\infty[$, donc sur $]1,+\infty[$.

c) En $+\infty$: l'intégrande tend vers $1_{[0,1[}$ (et $\frac{1}{2}$ en 1), domination par φ ($a=2$) : $F \to 1$. En 1^+ :

$$F(x) \ge \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{2t^x} = \frac{1}{2(x-1)} \to +\infty$$

Réponse. F définie et continue sur $]1,+\infty[$, $F\to 1$ en $+\infty$, $F\to+\infty$ en 1^+.

Correction de l'exercice 6 – Intégrales de Wallis à paramètre réel

a) En 0, $\sin^x t \sim t^x$: convergence $\Leftrightarrow x > -1$.

b) Pour $x \ge a > -1$: $0 < \sin^x t \le \max(1, \sin^a t)$, intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$: continuité. Comme $0 < \sin t \le 1$, $x \mapsto \sin^x t$ décroît : W décroît.

c) En $+\infty$: $\sin^x t \to 0$ pour $t < \frac{\pi}{2}$, domination par 1, donc $W \to 0$. En -1^+ : $\sin t \le t$ et $x<0$ donnent $\sin^x t \ge t^x$, d'où

$$W(x) \ge \int_0^{\pi/2} t^x\,\mathrm{d}t = \frac{(\pi/2)^{x+1}}{x+1} \underset{x\to -1}{\longrightarrow} +\infty$$

Réponse. W définie, continue, décroissante sur $]-1,+\infty[$; $W\to 0$ en $+\infty$, $W\to+\infty$ en -1^+.

Correction de l'exercice 7 – Limite d'une intégrale à bornes variables

a) Primitive $\ln(\ln t)$: $\ln\ln x^2 - \ln\ln x = \ln\frac{2\ln x}{\ln x} = \ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\frac{1}{\ln t} = \frac{t}{t\ln t}$ avec $x \le t \le x^2$, et $\frac{1}{t\ln t} > 0$:

$$x\ln 2 \le G(x) \le x^2 \ln 2$$

c) Quand $x \to 1^+$, les deux bornes tendent vers $\ln 2$: $G(x) \to \ln 2$ (alors que l'intégrande explose en 1). En $+\infty$, l'encadrement donne seulement $G(x) \to +\infty$ entre $x\ln 2$ et $x^2\ln 2$; plus précisément, $G(x) \sim \frac{x^2}{2\ln x}$ (intégrale logarithme).

Réponse. $x\ln 2 \le G(x) \le x^2 \ln 2$, donc $G(x) \to \ln 2$ quand $x \to 1^+$.

Correction de l'exercice 8 – Une intégrale oscillante à paramètre

a) $\left|\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\right| \le \frac{1}{1+t^2}$: domination globale, continuité ; sin impaire.

b) La dérivée partielle $\frac{t\cos(xt)}{1+t^2}$ n'est dominée par aucune fonction intégrable : en $x = 0$, elle vaut $\frac{t}{1+t^2}$, non intégrable.

c) $\int_0^X \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(xt)}{x(1+t^2)}\right]_0^X - \frac{1}{x}\int_0^X \frac{2t\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, donc

$$|F(x)| \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x} \longrightarrow 0$$

(lemme de Riemann-Lebesgue sur un exemple).

Réponse. F continue impaire, non dérivable sous l'intégrale par domination ; $|F(x)| \le \frac{2}{x} \to 0$.

Correction de l'exercice 9 – Moyenne de Laplace et limite en l'infini

a) $t = \frac{u}{x}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}$.

b) Quand $x \to 0^+$, $\frac{u}{x} \to +\infty$ pour $u > 0$, donc $f(\frac{u}{x})\mathrm{e}^{-u} \to \ell\mathrm{e}^{-u}$, avec la domination $\|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$:

$$L(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ell\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \ell$$

De même, quand $x \to +\infty$, $f(\frac{u}{x}) \to f(0)$ (continuité) : $L(x) \to f(0)$.

c) $x\int_0^{+\infty} \arctan(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$ en 0^+ et $\to 0$ en $+\infty$.

Réponse. $L(x) = \int_0^{+\infty} f(\frac{u}{x})\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$: $L \to \ell$ en 0^+, $L \to f(0)$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 10 – Une fonction digamma

a) En 1 : $\frac{1-t^x}{1-t} \to x$ (prolongeable). En 0 : $\frac{1-t^x}{1-t} \sim 1 - t^x$, intégrable si $x > -1$. Domination locale sur $[a,b] \subset]-1,+\infty[$: $\left|\frac{1-t^x}{1-t}\right| \le \frac{1+t^a}{1-t}$ près de 0, et près de 1 l'intégrande est bornée uniformément (accroissements finis en t). Croissance : t^x décroît en x.

b) $\psi(x+1) - \psi(x) = \int_0^1 \frac{t^x - t^{x+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$; avec $\psi(0) = 0$:

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

c) $\psi(x) = \psi(x+1) - \frac{1}{x+1}$, avec $\psi(x+1) \to \psi(0) = 0$.

Réponse. ψ continue croissante, $\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x+1}$, $\psi(n) = H_n$, $\psi \to -\infty$ en -1^+.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Équivalent d'une transformée de Laplace

a) $0 \le \mathrm{e}^{-xt}\ln(1+t) \le \mathrm{e}^{-at}\ln(1+t)$ pour $x \ge a > 0$, intégrable : continuité.

b) $t = \frac{u}{x}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{x}$: $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{u}{x})\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

c) $x\ln(1+\frac{u}{x}) \to u$ et $0 \le x\ln(1+\frac{u}{x}) \le u$, avec $u\mathrm{e}^{-u}$ intégrable :

$$x^2F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$$

Réponse. $x^2F(x) \to 1$: $F(x) \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 12 – Une explosion logarithmique

a) Pour $x > 0$, $t = x\mathrm{sh}u$: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}} = \mathrm{argsh}\frac{t}{x}$, donc $F(x) = \mathrm{argsh}\frac{1}{|x|}$ (par parité).

b) $\mathrm{argsh}y = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = \ln(2y) + o(1)$ en $+\infty$, donc

$$F(x) = \ln\frac{2}{|x|} + o(1) \sim \ln\frac{1}{|x|}$$

c) $F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge ; il n'existe pas de domination intégrable des $\frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}$ au voisinage de $x = 0$ (le sup vaut $\frac{1}{t}$).

Réponse. $F(x) = \mathrm{argsh}\frac{1}{|x|} \sim \ln\frac{1}{|x|}$ en 0 ; $F(0)$ n'existe pas.

Correction de l'exercice 13 – Une intégrale trigonométrique classique

a) Sur $[a,b] \subset]1,+\infty[$, l'intégrande est continue et bornée par $\frac{1}{a-1}$ sur $[a,b]\times[0,2\pi]$; décroissance en x évidente.

b) Par 2π-périodicité on intègre sur $]-\pi,\pi[$; $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(x-1)+(x+1)u^2} = \frac{2}{x+1}\cdot\pi\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

c) En 1^+ : $F(x) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{2(x-1)}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}$; en $+\infty$: $F(x) \sim \frac{2\pi}{x}$.

Réponse. $F(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}$; $\sim \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}$ en 1^+, $\sim \frac{2\pi}{x}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 14 – Gamma au voisinage de zéro et de l'infini

a) $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ et $\Gamma(x+1) \to \Gamma(1) = 1$ (continuité de Γ, établie par domination locale).

b) Pour $t \ge 1$, $x \mapsto t^{x-1}$ croît. Pour $x \le y$:

$$\Gamma(y) \ge \int_1^{+\infty} t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \ge \int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x) - \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \ge \Gamma(x) - \frac{1}{x}$$

c) Pour $x \in [n, n+1]$, $\Gamma(x) \ge \Gamma(n) - \frac{1}{n} = (n-1)! - \frac{1}{n} \to +\infty$: $\Gamma(x) \to +\infty$.

Réponse. $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+, et $\Gamma(x) \to +\infty$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : la fonction exponentielle intégrale

a) Pour $x \geq a > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \leq \frac{\mathrm{e}^{-t}}{a}$: continuité. Décroissance en x ; et $\frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$ donne $F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{x}$.

b) $\frac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-t} \to \mathrm{e}^{-t}$ quand $x \to +\infty$, dominée par e^{-t} : $xF(x) \to 1$.

c) $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$; le second terme est compris entre 0 et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}$. Dans le premier, $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{e}^{-t} \leq 1$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t} = \ln\frac{1+x}{x}$, donc

$$\mathrm{e}^{-1}\ln\frac{1+x}{x} \leq F(x) \leq \ln\frac{1+x}{x} + 1$$

Plus finement, $\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est borné, d’où $F(x) = \ln\frac{1}{x} + O(1)$.

d) $F(x) \sim \ln\frac{1}{x}$ en 0^+ et $F(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

Réponse. F continue décroissante, $F(x) \sim \ln\frac{1}{x}$ en 0^+, $F(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).