Plaquette 3 – Dérivation sous l'intégrale et calculs d'intégrales

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivation sous l'intégrale. Si h et $\partial_x h$ sont continues en x, intégrables en t, et si $|\partial_x h(x,t)| \le \varphi(t)$ intégrable pour x dans tout segment de J, alors F est C^1 sur J et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

Fractions utiles (pour $x > 0$, $x \neq 1$) :

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$;

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{1+x^2}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$.

Correction de l'exercice 1 – Arc tangente sur t fois un plus t carré

a) $\left|\frac{\arctan(xt)}{t}\right| \le x$ (car $|\arctan u| \le |u|$), d'où la domination par $\frac{b}{1+t^2}$ pour $x \in [0,b]$. Et $\partial_x = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \le \frac{1}{1+t^2}$.

b) Pour $x \neq 1$: $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)$, d'intégrale $\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+x)}$; puis continuité en $x = 1$.

c) $F(0) = 0$, donc

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$$

Réponse. $F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$, $F(0) = 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

Correction de l'exercice 2 – Logarithme de un plus x sinus carré

a) Sur $[a,b] \subset]-1,+\infty[$, l'intégrande et sa dérivée $\frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}$ sont continues sur le compact $[a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (car $1 + x\sin^2 t \ge \min(1, 1+a) > 0$).

b) $\frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1+x\sin^2 t}\right)$ et, avec $u = \tan t$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\sin^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(1+x)u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}$.

c) Avec $s = \sqrt{1+x}$, $x = s^2 - 1$: $F'(x) = \frac{\pi}{2(s^2-1)} \cdot \frac{s-1}{s} = \frac{\pi}{2s(s+1)}$, et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\frac{1+s}{2} = \frac{1}{1+s}\cdot\frac{1}{2s}$. Avec $F(0) = 0$:

$$F(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+x}}{2}$$

Réponse. $F'(x) = \frac{\pi}{2x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$ et $F(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+x}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Une gaussienne déformée

a) Sur $[a,b]\subset\,]0,+\infty[$: $|\partial_x| = \frac{2x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2} \le \frac{2b}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-a^2/t^2}$, intégrable (nulle en 0 grâce à e^{-a^2/t^2}, et en e^{-t^2} à l’infini).

b) $u=\frac{x}{t}$, $\mathrm{d}u=-\frac{x}{t^2}\mathrm{d}t$, et $t^2+\frac{x^2}{t^2}=\frac{x^2}{u^2}+u^2$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2-x^2/u^2}\,\mathrm{d}u=F(x)$$

c) $F(x)=F(0)\mathrm{e}^{-2x}$ avec $F(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse. $F'=-2F$: $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-x^2/t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

Correction de l’exercice 4 – Laplace d’un quotient par t

a) $\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\le 1$, donc l’intégrande et sa dérivée $-\mathrm{e}^{-xt}(1-\mathrm{e}^{-t})$ sont dominées par e^{-at} sur $[a,+\infty[$. Et

$$F'(x)=-\int_0^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-(x+1)t}\right)\mathrm{d}t=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$$

b) $0\le F(x)\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$.

c) $F(x)=\ln\frac{x+1}{x}+C$ et $C=0$ par b).

Réponse. $F'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $F\to 0$: $F(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Correction de l’exercice 5 – Puissances et logarithmes par dérivations successives

a) $\partial_x^n(t^x)=t^x(\ln t)^n$. Sur $[a,b]\subset\,]-1,+\infty[$: $|t^x\ln^n t|\le t^a|\ln t|^n$, intégrable sur $]0,1]$ (car $a>-1$) : dérivation sous l’intégrale à tout ordre.

b) $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{1}{x+1}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$, d’où

$$\int_0^1 t^x(\ln t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

c) $x=2$, $n=3$: $\frac{-6}{3^4}=-\frac{2}{27}$.

Réponse. $\int_0^1 t^x\ln^n t=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$; $\int_0^1 t^2\ln^3 t=-\frac{2}{27}$.

Correction de l’exercice 6 – Dérivée d’une transformée de Laplace

a) $|t^n f(t)\mathrm{e}^{-xt}|\le\|f\|_\infty t^n\mathrm{e}^{-at}$ pour $x\ge a>0$, intégrable : dérivations successives sous l’intégrale.

b) Pour $f=\sin$, $L(x)=\frac{1}{1+x^2}$, donc

$$\int_0^{+\infty}t\sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=-L'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

(on applique a) à $f=\sin$; la fonction $t\sin t$ n’est pas bornée mais l’intégrale converge).

c) $x=1$: $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, conforme au calcul direct de la plaquette précédente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $L^{(n)} = (-1)^n L(t^n f)$; $L(t\sin t)(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; en $x=1$: $\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Frullani avec un cosinus

a) En 0, $\dfrac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t} \to b-a$; en $+\infty$, décroissance exponentielle. $\partial_b = \mathrm{e}^{-bt}\cos t$, dominé par e^{-ct} pour $b \geq c > 0$.

b) $F'(b) = \dfrac{b}{1+b^2}$ et $F(a) = 0$:

$$F(b) = \frac{1}{2}\ln(1+b^2) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$$

c) Avec 1 au lieu de $\cos t$, $F'(b) = \dfrac{1}{b}$ et $F(b) = \ln\dfrac{b}{a}$: même méthode, la dérivation remplace le découpage $[\varepsilon, X]$.

Réponse. $F'(b) = \dfrac{b}{1+b^2}$, $F(a)=0$: $F(b) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+b^2}{1+a^2}$.

Correction de l'exercice 8 – Moments gaussiens par dérivation

a) $\partial_a^n \mathrm{e}^{-at^2} = (-t^2)^n \mathrm{e}^{-at^2}$, dominé par $t^{2n}\mathrm{e}^{-ct^2}$ pour $a \geq c > 0$, intégrable.

b) $-I'(a) = \int t^2 \mathrm{e}^{-at^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$ et $I''(a) = \int t^4 \mathrm{e}^{-at^2} = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4} a^{-5/2}$.

c) $(-1)^n I^{(n)}(a) = \dfrac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\, a^{-n-1/2}$, soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}$$

Réponse. $\int t^2\mathrm{e}^{-at^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$, $\int t^4\mathrm{e}^{-at^2} = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}$, et $\int t^{2n}\mathrm{e}^{-at^2} = \dfrac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}\, a^{-n-1/2}$.

Correction de l'exercice 9 – Logarithme de un plus x carré t carré

a) $\dfrac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} = O\!\left(\dfrac{\ln t}{t^2}\right)$ en $+\infty$. $\partial_x = \dfrac{2xt^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \dfrac{2b}{a^2}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}$ pour $x \in [a,b]$ (car $\dfrac{t^2}{1+x^2t^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$).

b) Pour $x \neq 1$: $\dfrac{t^2}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+x^2t^2}\right)$, d'intégrale $\dfrac{1}{x^2-1}\cdot\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$, donc

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{\pi(x-1)}{2x} = \frac{\pi}{1+x}$$

c) $F(0)=0$ et continuité en 0 : $F(x) = \pi\ln(1+x)$. En $x=1$: $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\ln 2$.

Réponse. $F'(x) = \dfrac{\pi}{1+x}$, $F(x) = \pi\ln(1+x)$; $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} = \pi\ln 2$.

Correction de l'exercice 10 – L'intégrale de Poisson

a) $1 - 2x\cos t + x^2 \geq (1-|x|)^2 > 0$; sur $[-b,b]$ ($b<1$), intégrande et dérivée partielle sont continues sur un compact.

b) L'identité se développe directement. Donc

$$F'(x) = \int_0^{\pi}\frac{2x - 2\cos t}{1-2x\cos t + x^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(\pi - (1-x^2)\frac{\pi}{1-x^2}\right) = 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) F est constante sur $]-1,1[$, égale à $F(0)=0$. Pour $|x|>1$:
$1-2x\cos t+x^2 = x^2\left(1-\frac{2}{x}\cos t+\frac{1}{x^2}\right)$, d'où $F(x)=2\pi\ln|x|+F\left(\frac{1}{x}\right)=2\pi\ln|x|$.

Réponse. $F=0$ sur $]-1,1[$ et $F(x)=2\pi\ln|x|$ pour $|x|>1$.

Correction de l'exercice 11 – Arc tangente comme intégrale

a) $\left|\mathrm{e}^{-t}\frac{\sin xt}{t}\right|\le|x|\mathrm{e}^{-t}$ et $|\partial_x|=|\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)|\le\mathrm{e}^{-t}$: domination globale de la dérivée, et domination locale de la fonction.

b) $F'(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t=\mathrm{Re}\frac{1}{1-ix}=\frac{1}{1+x^2}$.

c) $F(0)=0$:

$$F(x)=\arctan x$$

En particulier $F(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

Réponse. $F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $F(0)=0$: $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\frac{\sin xt}{t}=\arctan x$.

Correction de l'exercice 12 – Dérivation à borne variable et équation différentielle

a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x h(x,t)\,\mathrm{d}t=h(x,x)+\int_0^x\partial_x h(x,t)\,\mathrm{d}t$ (développer $h(x,t)$ = somme de produits, ou dérivation composée).

b) $y'(x)=\sin(0)g(x)+\int_0^x\cos(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$, puis

$$y''(x)=\cos(0)g(x)-\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t=g(x)-y(x)$$

et $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

c) $g=1$: $y(x)=\int_0^x\sin(x-t)\,\mathrm{d}t=1-\cos x$.

Réponse. $y=\int_0^x\sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$ résout $y''+y=g$, $y(0)=y'(0)=0$; pour $g=1$: $1-\cos x$.

Correction de l'exercice 13 – Développement en série d'une intégrale à paramètre

a) $\partial_x^n\mathrm{e}^{xt^2}=t^{2n}\mathrm{e}^{xt^2}$, continue sur $\mathbb{R}\times[0,1]$: dérivation sous l'intégrale (segment).
$F^{(n)}(0)=\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n+1}$.

b) $\mathrm{e}^{xt^2}=\sum\frac{x^nt^{2n}}{n!}$, convergence normale sur $[0,1]$ pour x fixé, donc

$$F(x)=\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n!}\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n!(2n+1)}$$

c) $x=1$: $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{42}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1320}+\cdots\approx1{,}4627$.

Réponse. $F^{(n)}(0)=\frac{1}{2n+1}$, $F(x)=\sum\frac{x^n}{n!(2n+1)}$; $\int_0^1\mathrm{e}^{t^2}\approx1{,}4627$.

Correction de l'exercice 14 – Une équation différentielle d'Euler

a) $|\partial_x|=\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^2}\le t\mathrm{e}^{-t}$: domination globale. $F(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}=1$.

b) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^2}\,\mathrm{d}t$, soit $F=1-x\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+xt)^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $F'(x) = -\int \frac{te^{-t}}{(1+xt)^2} = -\frac{1}{x}\left(F - \frac{1-F}{x}\right)$, d'où

$$x^2F'(x) + (1+x)F(x) = 1$$

C'est l'équation étudiée par Euler, dont la « solution formelle » $\sum (-1)^n n! x^n$ diverge pour tout $x \neq 0$.

Réponse. F vérifie $x^2F' + (1+x)F = 1$ avec $F(0) = 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction de Dawson

a) $|e^{-t^2}\sin(xt)| \leq e^{-t^2}$ et $|\partial_x| = |te^{-t^2}\cos(xt)| \leq te^{-t^2}$: dominations globales.

b) $G'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\cos(xt)\,dt = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\cos(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2} x\sin(xt)\,dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}G(x)$.

c) Équation linéaire d'ordre 1, avec $G(0) = 0$: variation de la constante sur $\left(Ge^{x^2/4}\right)' = \frac{1}{2}e^{x^2/4}$.

d) Par la règle de l'Hospital, ou en dérivant $\frac{2}{x}e^{x^2/4}$ (de dérivée $e^{x^2/4}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) \sim e^{x^2/4}$, fonctions positives divergentes) :

$$\int_0^x e^{u^2/4}\,du \sim \frac{2}{x}e^{x^2/4}, \qquad G(x) \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} = \frac{1}{x}$$

Réponse. $G' = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}G$, $G(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2/4}\int_0^x e^{u^2/4}\,du \sim \frac{1}{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).