Plaquette 4 – Fonctions Gamma et Bêta, transformées de Laplace et de Fourier

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Gamma et Bêta. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$; $B(a+1,b)=\frac{a}{a+b}B(a,b)$.

Laplace. Pour f continue bornée sur $[0,+\infty[$ et $x>0$:

$$L(t^{s-1})(x)=\frac{\Gamma(s)}{x^s},\qquad L(f')(x)=xLf(x)-f(0),\qquad (Lf)'=-L(tf)$$

Fourier. Pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, $\hat{f}$ est continue et bornée par $\int|f|$; si f est paire, $\hat{f}(x)=2\int_0^{+\infty}f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

Correction de l’exercice 1 – Transformée de Laplace des puissances

a) $u=xt$: $\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{x}\right)^{s-1}\mathrm{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{x}=\frac{\Gamma(s)}{x^s}$.

b) $L(t^n)(x)=\frac{n!}{x^{n+1}}$ et $L\left(t^{-1/2}\right)(x)=\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

c) $L(\mathrm{e}^{at})(x)=\frac{1}{x-a}$ pour $x>a$, et

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

donc $f(t)=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}$ convient (unique, par l’injectivité admise de L).

Réponse. $L(t^{s-1})=\frac{\Gamma(s)}{x^s}$, $L(t^n)=\frac{n!}{x^{n+1}}$, $L(t^{-1/2})=\sqrt{\frac{\pi}{x}}$; $f=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}$.

Correction de l’exercice 2 – Résoudre une équation différentielle par Laplace

a) Par parties : $\int_0^X f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\left[f\mathrm{e}^{-xt}\right]_0^X+x\int_0^X f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$, et $f(X)\mathrm{e}^{-xX}\to 0$.

b) $xLy+Ly=L(1)=\frac{1}{x}$, d’où

$$Ly(x)=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

c) $y=1-\mathrm{e}^{-t}$; vérification : $y'+y=\mathrm{e}^{-t}+1-\mathrm{e}^{-t}=1$. Pour $y''+y=0$: $x^2Ly-1+Ly=0$, $Ly=\frac{1}{1+x^2}=L(\sin)$, donc $y=\sin t$.

Réponse. $L(f')=xLf-f(0)$; $y=1-\mathrm{e}^{-t}$; $y=\sin t$.

Correction de l’exercice 3 – La formule de Gauss pour Gamma

a) $I_n=n^x\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u$, et par parties $\int_0^1(1-u)^k u^{y-1}\,\mathrm{d}u=\frac{k}{y}\int_0^1(1-u)^{k-1}u^y\,\mathrm{d}u$. En itérant :

$$\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,\mathrm{d}u=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^1 u^{x+n-1}\,\mathrm{d}u=\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n 1_{[0,n]} t^{x-1} \to \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ et $0 \le \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \mathrm{e}^{-t}$: domination par $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, intégrable.

c) $\Gamma(x) = \lim \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$. Pour $x=1$: $\frac{n\cdot n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1} \to 1 = \Gamma(1)$ ✓.

Réponse. $I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \to \Gamma(x)$ (formule de Gauss).

Correction de l’exercice 4 – La fonction bêta aux entiers

a) $B(1,n) = \int_0^1 (1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}$.

b) Récurrence sur m : vrai pour $m=1$; si vrai au rang m,

$$B(m+1,n) = \frac{m}{m+n}\cdot\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{m!(n-1)!}{(m+n)!}$$

c) $B(4,5) = \frac{3!\,4!}{8!} = \frac{144}{40320} = \frac{1}{280}$; $B(n+1,n+1) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Réponse. $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$; $\int_0^1 t^3(1-t)^4 = \frac{1}{280}$, $\int_0^1 (t(1-t))^n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Correction de l’exercice 5 – Une autre forme de la fonction bêta

a) En 0 : équivalent t^{a-1}, intégrable car $a>0$. En $+\infty$: équivalent t^{a-2}, intégrable car $a<1$.

b) $u \mapsto \frac{u}{1-u}$ est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$, avec $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2}$ et $1+t = \frac{1}{1-u}$:

$$J(a) = \int_0^1 \frac{u^{a-1}}{(1-u)^{a-1}}(1-u)\frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{-a}\,\mathrm{d}u = B(a,1-a)$$

c) $J\left(\frac{1}{2}\right) = \pi = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)}$ ✓. Symétrie de B : $J(a) = J(1-a)$ (ou $t=\frac{1}{s}$). On montre que $J(a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = B(a,1-a)$, symétrique en $a \leftrightarrow 1-a$; π pour $a=\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – Intégrales de Wallis et fonction bêta

a) $\mathrm{d}t = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, $t^{a-1}(1-t)^{b-1} = \sin^{2a-2}\theta\cos^{2b-2}\theta$, d’où $B(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\cos^{2b-1}$.

b) $2a-1 = 2n$ et $2b-1 = 0$: $a = n+\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$.

c) $B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{n-\frac{1}{2}}{n} B\left(n-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \cdots = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\cdot\pi$, donc

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Réponse. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\cos^{2b-1} = \frac{1}{2}B(a,b)$, d’où $W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}$.

Correction de l’exercice 7 – Transformée de Laplace du logarithme

a) Dérivation sous l’intégrale (domination locale de $|\ln t| t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ pour $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$).

b) $u = xt$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\int_0^{+\infty} \ln t\, \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} (\ln u - \ln x)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{-\gamma - \ln x}{x}$$

c) $x = 2$: $-\dfrac{\gamma + \ln 2}{2} \approx -\dfrac{0{,}5772 + 0{,}6931}{2} \approx -0{,}635$.

Réponse. $L(\ln t)(x) = -\dfrac{\gamma + \ln x}{x}$; pour $x = 2$: $\approx -0{,}635$.

Correction de l'exercice 8 – Transformée de Fourier d'une exponentielle symétrique

a) f paire : $\hat{f}(x) = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{Re}\dfrac{1}{1-ix} = \dfrac{2}{1+x^2}$.

b) $\dfrac{2}{1+x^2}$ est une fraction rationnelle sans pôle réel. La régularité de $\hat{f}$ vient de la décroissance de f (tous les moments $\int |t|^k \mathrm{e}^{-|t|}$ sont finis), le défaut de régularité de f se traduit par une décroissance seulement en $\dfrac{1}{x^2}$ de $\hat{f}$.

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\pi = 2\pi f(0)$: c'est la formule d'inversion de Fourier en $t = 0$.

Réponse. $\widehat{\mathrm{e}^{-|t|}}(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$, et $\int \hat{f} = 2\pi f(0)$.

Correction de l'exercice 9 – Transformée de Fourier d'une indicatrice

a) $\hat{f}(x) = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$, et $\hat{f}(0) = 2$.

b) Continue (prolongement en 0), et $|\hat{f}(x)| \leq \dfrac{2}{|x|} \to 0$. Mais $\int \dfrac{|\sin x|}{|x|}$ diverge : $\hat{f}$ n'est pas intégrable, bien que f le soit.

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge (semi-convergence) et vaut

$$4\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 2\pi = 2\pi f(0)$$

formule d'inversion encore vraie en ce point de continuité de f.

Réponse. $\hat{f}(x) = \dfrac{2\sin x}{x}$: continue, de limite nulle, non intégrable ; $\int \hat{f} = 2\pi$ (semi-convergente).

Correction de l'exercice 10 – Lemme de Riemann-Lebesgue

a) $\int_a^b f\mathrm{e}^{ixt} = \left[\dfrac{f\mathrm{e}^{ixt}}{ix}\right]_a^b - \dfrac{1}{ix}\int_a^b f'\mathrm{e}^{ixt}$, et l'on majore les modules.

b) Partie réelle de a).

c) $\sin^2(xt) = \dfrac{1-\cos(2xt)}{2}$, donc

$$\int_0^{\pi} t^2\sin^2(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t^2\cos(2xt)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \frac{\pi^3}{6}$$

la valeur moyenne $\dfrac{1}{2}$ de $\sin^2$ remplace la fonction qui oscille.

Réponse. $\left|\int f\mathrm{e}^{ixt}\right| = O(\frac{1}{x})$; $\int_0^{\pi} t^2\sin^2(xt)\,\mathrm{d}t \to \dfrac{\pi^3}{6}$.

Correction de l'exercice 11 – Laplace d'une fonction périodique

a) $\int_{kT}^{(k+1)T} f\mathrm{e}^{-xt} = \mathrm{e}^{-kTx}\int_0^T f\mathrm{e}^{-xt}$ (périodicité, $t \mapsto t + kT$), et $\sum_{k\geq 0} \mathrm{e}^{-kTx} = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-Tx}}$ (termes positifs pour $f \geq 0$, sinon convergence absolue).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\dfrac{\mathrm{e}^{(i-x)\pi}-1}{i-x} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi x}}{1+x^2}$, d'où la formule.

c) Quand $x\to 0^+$, $1-\mathrm{e}^{-\pi x}\sim \pi x$, donc

$$xLf(x)\longrightarrow \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t$$

Réponse. $Lf = \dfrac{\int_0^T f\mathrm{e}^{-xt}}{1-\mathrm{e}^{-Tx}}$; $L|\sin| = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi x}}{(1+x^2)(1-\mathrm{e}^{-\pi x})}$, et $xL|\sin|\to\frac{2}{\pi}$.

Correction de l'exercice 12 – La fonction digamma et les nombres harmoniques

a) $\Gamma'(x+1) = \Gamma(x)+x\Gamma'(x)$, et en divisant par $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$: $\psi(x+1)=\frac{1}{x}+\psi(x)$.

b) Par récurrence, $\psi(n+1)=\psi(1)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, avec $\psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma$. Donc

$$\Gamma'(n+1)=\Gamma(n+1)\psi(n+1)=n!(H_n-\gamma)$$

c) $\int_0^{+\infty} t^n\ln t\,\mathrm{e}^{-t}=\Gamma'(n+1)$: pour $n=1$, $1-\gamma\approx 0{,}423$; pour $n=2$, $2\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)=3-2\gamma\approx 1{,}846$.

Réponse. $\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x}$, $\Gamma'(n+1)=n!(H_n-\gamma)$; $\int t\ln t\,\mathrm{e}^{-t}=1-\gamma$.

Correction de l'exercice 13 – Inverser une transformée de Laplace rationnelle

a) $\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-(x-a)t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$.

b) Décomposition : $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{\alpha}{x+1}+\dfrac{\beta}{x-1}+\dfrac{\delta}{(x-1)^2}$ avec $\alpha=\dfrac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2}$, $\delta=\dfrac{3+1}{2}=2$ et, en comparant les termes en $\frac{1}{x}$ à l'infini, $\alpha+\beta=0$, $\beta=\frac{1}{2}$. Donc

$$f(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t}+2t\mathrm{e}^{t}$$

c) $Lf=-\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$, et en réduisant : $\dfrac{-(x-1)^2+(x-1)(x+1)+4(x+1)}{2(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{6x+2}{2(x-1)^2(x+1)}$ ✓.

Réponse. $L(t^n\mathrm{e}^{at})=\dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$; $f=\mathrm{sh}t+2t\mathrm{e}^{t}$.

Correction de l'exercice 14 – Laplace d'une fonction divisée par t

a) Dérivation sous l'intégrale (domination par $\|f\|_\infty\mathrm{e}^{-at}$ de $\frac{f(t)}{t}\cdot t\mathrm{e}^{-xt}$). Et $|g(x)|\le\int_0^1\frac{|f|}{t}\mathrm{e}^{-xt}+\|f\|_\infty\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\to 0$ (convergence dominée sur $[0,1]$).

b) $g(x)=-\int_x^X g'(u)\,\mathrm{d}u+g(X)$, puis $X\to+\infty$:

$$g(x)=\int_x^{+\infty} Lf(u)\,\mathrm{d}u$$

c) $\int_x^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan x$ ✓. Pour $f=1-\mathrm{e}^{-t}$: $Lf(u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}$, d'où $g(x)=\ln\frac{x+1}{x}$.

Réponse. $L(\frac{f}{t})(x)=\int_x^{+\infty}Lf$; $L(\frac{\sin t}{t})=\frac{\pi}{2}-\arctan x$, $L(\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t})=\ln\frac{x+1}{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : étude de la fonction Gamma

a) $\partial_x^k\left(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right) = (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, dominée sur $[a,b]$ par $|\ln t|^k\left(t^{a-1}+t^{b-1}\right)\mathrm{e}^{-t}$, intégrable. $\Gamma''(x) = \int (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} > 0$.

b) $\Gamma'(x) = \int \ln t\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, et Cauchy-Schwarz donne

$$\Gamma'(x)^2 \le \int t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\cdot\int (\ln t)^2 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

d’où $(\ln\Gamma)'' = \dfrac{\Gamma\Gamma''-\Gamma'^2}{\Gamma^2} \ge 0$.

c) $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$: Rolle donne $x_0\in\,]1,2[$ avec $\Gamma'(x_0)=0$, unique car Γ' est strictement croissante. Γ décroît sur $]0,x_0]$, croît sur $[x_0,+\infty[$ (minimum $\Gamma(x_0)\approx 0{,}886$, en $x_0\approx 1{,}46$).

d) $\Gamma(x)\sim\frac{1}{x}$ en 0^+ (plaquette 2) et $\Gamma(x)\to+\infty$ en $+\infty$ (même $\Gamma(n+1)=n!$).

Réponse. $\Gamma\in C^\infty$, $\ln\Gamma$ convexe, minimum unique en $x_0\in\,]1,2[$; $\Gamma\sim\frac{1}{x}$ en 0^+, $\to+\infty$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).