Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : méthode de Laplace, équations différentielles et intégrales célèbres

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode de Laplace. Si $h(x,u) \to \mathrm{e}^{-u^2/2}$ pour tout u quand $x \to +\infty$ et $|h(x,u)| \leq \varphi(u)$ intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} h(x,u)\,\mathrm{d}u \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

Inégalités utiles. $\ln(1+v) - v \leq -\frac{v^2}{2}$ pour $v \in]-1,0]$; $\ln(1+v) - v \leq -\frac{v^2}{2(1+v)}$ pour $v \geq 0$; $\cos v \leq \mathrm{e}^{-v^2/2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Intégration par parties en t. Elle transforme ∂_x^2 d'une intégrande en ∂_t^2, et fait apparaître une équation différentielle.

Correction de l'exercice 1 – L'équation de Bessel

a) Dérivation sous l'intégrale (segment, intégrande C^∞) : $F'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $F''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

b) $u = \sin(x\sin t)$, $v' = \sin t$, $v = -\cos t$: le crochet $-\cos t \sin(x\sin t)$ est nul en 0 et π, et

$$\int_0^\pi \sin t \sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos t \cdot x\cos t \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

c) $xF'' + F' + xF = \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \Big(-\sin^2 t - \cos^2 t + 1\Big)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t = 0$. Et $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$: $F = J_0$, fonction de Bessel d'ordre 0.

Réponse. F vérifie $xF'' + F' + xF = 0$, $F(0) = 1$: c'est J_0.

Correction de l'exercice 2 – La formule de Stirling par la méthode de Laplace

a) $t^x = x^x\Big(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\Big)^x$, $\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}u}$, $\mathrm{d}t = \sqrt{x}\,\mathrm{d}u$, et $t > 0 \Leftrightarrow u > -\sqrt{x}$.

b) Avec $v = \frac{u}{\sqrt{x}} \to 0$: $x(\ln(1+v) - v) = x\Big(-\frac{v^2}{2} + O(v^3)\Big) = -\frac{u^2}{2} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)$. Les inégalités rappelées donnent, avec $x(\ln(1+v) - v)$: $\leq -\frac{u^2}{2}$ pour $u \leq 0$, et $\leq -\frac{u^2}{2(1+u/\sqrt{x})} \leq -\frac{u^2}{2(1+u)}$ pour $u \geq 0$, $x \geq 1$.

c) La fonction dominante est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comportement en $\mathrm{e}^{-u/2}$ en $+\infty$), et $h_x 1_{]-\sqrt{x},+\infty[} \to \mathrm{e}^{-u^2/2}$. Par convergence dominée :

$$\frac{\Gamma(x+1)}{x^x \mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}} \longrightarrow \sqrt{2\pi}$$

Réponse. Changement $t = x + \sqrt{x}u$ et convergence dominée : $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\,(x/\mathrm{e})^x$.

Correction de l'exercice 3 – Équivalent des intégrales de Wallis

a) $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $n\ln\cos\frac{u}{\sqrt{n}} = n\left(-\frac{u^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\to -\frac{u^2}{2}$. Et $\cos^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\le\left(\mathrm{e}^{-u^2/(2n)}\right)^n = \mathrm{e}^{-u^2/2}$ sur le domaine d'intégration.

c) Convergence dominée sur $[0,+\infty[$ (intégrande prolongée par 0) :

$$\sqrt{n}W_n \longrightarrow \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Réponse. $\sqrt{n}W_n\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, soit $W_n\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction de l'exercice 4 – L'intégrale elliptique complète

a) Sur $[0,b]$ ($b<1$), l'intégrande est continue et majorée par $\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$; elle croît avec k.

b) $(1-k^2\sin^2 t)^{-1/2} = \sum_n \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}k^{2n}\sin^{2n}t$, série à termes positifs ; intégration terme à terme et $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n\ge 0}\left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 k^{2n}$$

c) Les coefficients sont équivalents à $\frac{1}{\pi n}$ (car $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$), série divergente en $k=1$: par le lemme d'Abel pour les termes positifs, $K(k)\to+\infty$.

Réponse. $K(k) = \frac{\pi}{2}\sum\left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 k^{2n}$, continue croissante, $\to+\infty$ en 1^-.

Correction de l'exercice 5 – Continuité en zéro d'une transformée de Laplace semi-convergente

a) $\int_X^Y g\sin = [-g\cos]_X^Y + \int_X^Y g'\cos$, donc $\left|\int_X^Y g\sin\right|\le g(X)+g(Y)+\int_X^Y(-g') = 2g(X)$.

b) $g(t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}$ est positive décroissante, et $g(X)\le\frac{1}{X}$; on fait $Y\to+\infty$.

c) $F(x)-F(0) = \int_0^X\left(\mathrm{e}^{-xt}-1\right)\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + R_X(x)-R_X(0)$ avec $|R_X|\le\frac{2}{X}$. Pour $\varepsilon>0$, on fixe X avec $\frac{4}{X}\le\varepsilon$, puis le premier terme (intégrale sur un segment, continue en x) tend vers 0. Donc F est continue en 0 et

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right) = \frac{\pi}{2}$$

Réponse. Reste uniformément majoré par $\frac{2}{X}$: F continue en 0, et $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Équation de la chaleur pour une donnée cosinus

a) $\cos(x+2\sqrt{t}s) = \cos x\cos(2\sqrt{t}s) - \sin x\sin(2\sqrt{t}s)$; la partie en sin est impaire en s (intégrale nulle), et

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\mathrm{e}^{-s^2}\cos(2\sqrt{t}s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-4t/4} = \mathrm{e}^{-t}$$

b) $\partial_t u = -\mathrm{e}^{-t}\cos x = \partial_x^2 u$, et $\mathrm{e}^{-t}\cos x\to\cos x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Les dérivées en x de l'intégrande sont bornées par e^{-s^2}, intégrable : on peut dériver deux fois sous l'intégrale, ce qui donne la formule générale $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \mathrm{e}^{-s^2} f(x + 2\sqrt{t}s)\,\mathrm{d}s$ pour toute donnée f de classe C^2 bornée à dérivées bornées.

Réponse. $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\cos x$, solution de $\partial_t u = \partial_x^2 u$ avec $u(\cdot,0) = \cos$.

Correction de l'exercice 7 – Méthode de Laplace élémentaire

a) $t = \frac{u}{\sqrt{x}}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{x}}$.

b) $f\!\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) \to f(0)$ et la domination $\|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u^2}$ donne

$$\sqrt{x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2} f(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow f(0)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

c) $f(t) = \frac{1}{1+t}$, $f(0) = 1$: l'intégrale est équivalente à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ (seules les valeurs de f près du maximum de e^{-xt^2} comptent).

Réponse. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2} f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{x}}$; pour $\frac{1}{1+t}$: $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 8 – Moments de la loi Gamma

a) $\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x} = \Gamma(a)$. Et $m_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+k-1)$.

b) Espérance $m_1 = a$; variance $m_2 - m_1^2 = a(a+1) - a^2 = a$.

c) $\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-(1+s)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)}{(1+s)^a}$, donc la transformée vaut

$$\varphi(s) = (1+s)^{-a}, \qquad -\varphi'(0) = a = m_1$$

(dérivation sous l'intégrale justifiée par domination sur $s \geq s_0 > -1$).

Réponse. $m_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$, espérance et variance égales à a, transformée $(1+s)^{-a}$.

Correction de l'exercice 9 – Une intégrale par symétrie

a) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$, d'où $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{2}{1+\tan\theta}$.

b) $I = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I$, donc

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

c) $t = \tan\theta$, $\mathrm{d}t = (1+t^2)\,\mathrm{d}\theta$: $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = I = \frac{\pi}{8}\ln 2 \approx 0{,}2722$.

Réponse. $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta) = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Correction de l'exercice 10 – Une intégrale avec x sinus x

a) $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} - I$.

b) $u = \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

c) $I = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$.

Correction de l'exercice 11 – L'intégrale de Gauss par une fonction auxiliaire

a) Intégrande et dérivée partielle continues sur $\mathbb{R} \times [0,1]$: dérivation sous l'intégrale (segment).

b) $u = xt$ ($x > 0$) : $x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, donc $g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, et $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) $f+g$ est constante, égale à $f(0)+g(0) = 0 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$. Quand $x \to +\infty$, $0 \le g(x) \le \mathrm{e}^{-x^2} \to 0$, donc

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

Réponse. $f+g = \frac{\pi}{4}$ et $g \to 0$: $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Transformée de Fourier de la gaussienne par série entière

a) $\cos(xt) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n} t^{2n}}{(2n)!}$, et $\sum_n \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\mathrm{e}^{-t^2} = \int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t < +\infty$.

b) $F(x) = \sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_n \frac{(-x^2/4)^n}{n!}$, soit

$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}$$

c) La méthode différentielle ($F' = -\frac{x}{2}F$) évite les calculs de moments ; la série entière, elle, donne directement le développement et marche pour des intégrandes non dérivables sous l'intégrale.

Réponse. Intégration terme à terme : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

Correction de l'exercice 13 – Laplace et une équation à second membre exponentiel

a) On applique deux fois $L(f') = xLf - f(0)$ (valable pour x supérieur au taux de croissance).

b) $(x^2-3x+2)Ly = L(\mathrm{e}^{3t}) = \frac{1}{x-3}$, et $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$.

c) $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1/2}{x-3}$ (valeurs des résidus en 1, 2, 3), d'où

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}$$

$y(0) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} = 0$ ✓.

Réponse. $y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}$.

Correction de l'exercice 14 – Quand la dérivation sous l'intégrale échoue

a) $\int_0^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \sqrt{t-x}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + (1-x)^{3/2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Sur $[0,1]$: $F'(x) = x^{1/2} - (1-x)^{1/2}$, continue ; et pour $x \le 0$, $F(x) = \frac{2}{3}\left((1-x)^{3/2} - (-x)^{3/2}\right)$, de dérivée $-(1-x)^{1/2} + (-x)^{1/2}$, qui se raccorde en 0. Mais

$$F''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

donc F n'est pas deux fois dérivable en 0.

c) $\partial_x \sqrt{|x-t|} = \frac{\operatorname{sgn}(x-t)}{2\sqrt{|x-t|}}$ est dominée localement de façon intégrable, mais $\partial_x^2 \sim \frac{-1}{4|x-t|^{3/2}}$ n'est pas intégrable en $t = x$: le théorème ne s'applique plus.

Réponse. $F = \frac{2}{3}(x^{3/2} + (1-x)^{3/2})$ sur $[0,1]$: C^1, pas C^2 (dérivée seconde non intégrable).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la transformée de Fourier de un sur un plus t carré

a) Domination par $\frac{1}{1+t^2}$: continuité ; parité de cos ; $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

b) $|\partial_x g| = \frac{|u^2 - x^2|}{(x^2+u^2)^2} \le \frac{1}{a^2+u^2}$ et $|\partial_x^2 g| = \frac{2x|x^2-3u^2|}{(x^2+u^2)^3} \le \frac{6b}{(a^2+u^2)^2}$ pour $x \in [a,b]$, intégrables : $F''(x) = \int \partial_x^2 g \cos u \, du$.

c) $g(x,u) = \operatorname{Im}\frac{1}{u-ix}$ est harmonique : $\partial_x^2 g + \partial_u^2 g = 0$ (calcul direct : $\partial_u^2 g = \frac{2x(3u^2-x^2)}{(x^2+u^2)^3} = -\partial_x^2 g$). Avec $\partial_u g(x,0) = 0$ et $g \to 0$ en $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \partial_u^2 g \cos u \, du = [\partial_u g \cos u]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \partial_u g \sin u = 0 + [g \sin u]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g \cos u = -F$$

donc $F'' = -\int \partial_u^2 g \cos u = F$.

d) $F(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ sur $]0,+\infty[$; F est bornée (par $\frac{\pi}{2}$), donc $\alpha = 0$, et la continuité en 0 donne $\beta = \frac{\pi}{2}$. Par parité, $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

Réponse. $F'' = F$ sur $]0,+\infty[$, F bornée et $F(0) = \frac{\pi}{2}$: $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).