Plaquette 1 – Continuité, dérivation sous l'intégrale et fonction Gamma

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On applique les théorèmes de **continuité** et de **dérivation sous le signe intégral** en exhibant une **domination** valable sur un voisinage (ou un segment) du paramètre, puis on résout l'équation différentielle obtenue.

Exercice 1 – Continuité sous l'intégrale

Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 2 – Dérivation sous l'intégrale

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. Montrer que F est C^1 et calculer F'.

Exercice 3 – Fonction Gamma

Montrer que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est définie pour $x > 0$ et vérifier $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Exercice 4 – Convergence dominée

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\frac{t}{n}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 – Interversion série-intégrale

Calculer $\int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ en développant $\frac{1}{1-t}$ en série entière.

Exercice 6 – Équation différentielle vérifiée par F

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F' = -2xF$ et en déduire F.

Exercice 7 – Continuité d'une intégrale à bornes variables

Soit $G(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (prolongée par 1 en 0). Justifier que G est C^1 et donner G'.

Exercice 8 – Domination locale

Pourquoi la domination doit-elle être **locale** en x dans l'étude de $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Calcul par dérivation

Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. Calculer F' puis F.

Exercice 10 – Régularité C-infini

Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $]0\,;+\infty[$ et que $\Gamma'' > 0$.

Exercice 11 – Limite d'une intégrale à paramètre

Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

Exercice 12 – L'intégrale de Dirichlet par un paramètre

Pour $x > 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}$.

b) Montrer que $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, et en déduire $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

c) En admettant la continuité de F en 0, retrouver $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 13 – Une intégrale calculée par sa dérivée

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\frac{1-\cos(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que F est bien définie.

b) Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $F'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 14 – Logarithme d'une forme quadratique trigonométrique

Pour $x > 0$, soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\cos^2 t + x^2\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est dérivable et que $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin^2 t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

b) Avec $u = \tan t$, montrer que $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xu^2}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}\,\mathrm{d}u$, puis que $F'(x) = \frac{\pi}{1+x}$ (pour $x \neq 1$, décomposer en éléments simples en u^2).

c) En déduire $F(x) = \pi\ln\frac{1+x}{2}$.

Exercice 15 – Synthèse : transformée de Laplace

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Justifier l'existence.

b) Calculer $F(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).