Plaquette 2 – Continuité, limites et équivalents d'intégrales à paramètre

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour la **continuité** de $F(x) = \int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$, on vérifie la continuité de h en x et une **domination** $|h(x,t)| \leq \varphi(t)$ intégrable, souvent seulement **locale** (x dans un segment ou une demi-droite $[a, +\infty[$ intérieurs au domaine). Pour une **limite** en une borne, on applique la convergence dominée à une suite x_n tendant vers la borne. Pour un **équivalent**, on fait un **changement de variable** qui fait apparaître la bonne échelle ($u = xt$), puis convergence dominée, ou l'on **encadre** l'intégrande. Quand F explose, on isole la partie singulière (souvent un logarithme).

Exercice 1 – Une intégrale de puissances sur un segment

Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition et montrer que F est continue et décroissante.

b) Calculer $F(x) + F(x+1)$, et en déduire un équivalent de F en $+\infty$.

c) Donner un équivalent de F en -1^+.

Exercice 2 – Transformée de Laplace d'une fraction

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$ et calculer $F(0)$.

b) Montrer que $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

c) Avec $u = xt$, montrer que $xF(x) \to 1$.

Exercice 3 – Fonction gamma incomplète en zéro

Soit $\gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Montrer que $\frac{\mathrm{e}^{-1}}{x} \leq \gamma(x) \leq \frac{1}{x}$.

b) Avec $u = t^x$, montrer que $x\gamma(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-u^{1/x}}\,\mathrm{d}u$, et en déduire $\gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+.

c) En déduire $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+.

Exercice 4 – Une représentation intégrale de Bessel

Soit $F(x) = \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est définie, continue, paire, et que $|F(x)| \leq \pi$.

b) Montrer que F est de classe C^∞ et calculer $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Développer F en série entière (intégrer terme à terme le DSE de cos) en admettant $\int_0^{\pi} \sin^{2k} t\,\mathrm{d}t = \pi \dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k}$.

Exercice 5 – Domination sur une demi-droite

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition.

b) Montrer que F est continue sur $]1, +\infty[$ (dominer sur $[a, +\infty[$ pour $a > 1$).

c) Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1^+.

Exercice 6 – Intégrales de Wallis à paramètre réel

Soit $W(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de W.

b) Montrer que W est continue et décroissante sur ce domaine.

c) Déterminer la limite de W en $+\infty$ et en -1^+.

Exercice 7 – Limite d'une intégrale à bornes variables

Soit $G(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ pour $x > 1$.

a) Calculer $\int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$.

b) En encadrant t entre x et x^2, montrer que $x \ln 2 \leq G(x) \leq x^2 \ln 2$.

c) En déduire $\lim_{x \to 1^+} G(x)$. Que donne l'encadrement en $+\infty$?

Exercice 8 – Une intégrale oscillante à paramètre

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.

b) Pourquoi ne peut-on pas dériver sous l'intégrale par domination ?

c) Par une intégration par parties, montrer que $|F(x)| \leq \frac{2}{x}$ pour $x > 0$, et en déduire la limite en $+\infty$.

Exercice 9 – Moyenne de Laplace et limite en l'infini

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue bornée, admettant une limite ℓ en $+\infty$, et $L(x) = x \int_0^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Avec $u = xt$, écrire $L(x) = \int_0^{+\infty} f(\frac{u}{x}) \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire $L(x) \to \ell$ quand $x \to 0^+$, et $L(x) \to f(0)$ quand $x \to +\infty$.

c) Application : $f(t) = \arctan t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Une fonction digamma

Soit $\psi(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > -1$.

a) Montrer que ψ est bien définie, continue et croissante.

b) Montrer que $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x+1}$, et en déduire $\psi(n) = H_n$.

c) Montrer que $\psi(x) \to -\infty$ en -1^+.

Exercice 11 – Équivalent d'une transformée de Laplace

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Avec $u = xt$, montrer que $x^2 F(x) = \int_0^{+\infty} x \ln(1+\frac{u}{x}) \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

c) En déduire $F(x) \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ (utiliser $x\ln(1+\frac{u}{x}) \le u$).

Exercice 12 – Une explosion logarithmique

Soit $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}}$ pour $x \neq 0$.

a) Calculer $F(x)$ explicitement à l'aide de argsh.

b) En déduire $F(x) \sim \ln\frac{1}{|x|}$ quand $x \to 0$.

c) Pourquoi ne peut-on pas définir $F(0)$?

Exercice 13 – Une intégrale trigonométrique classique

Soit $F(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x - \cos t}$ pour $x > 1$.

a) Montrer que F est continue et décroissante sur $]1, +\infty[$.

b) Avec $u = \tan\frac{t}{2}$ sur $]-\pi, \pi[$, montrer que $F(x) = \frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}$.

c) En déduire un équivalent de F en 1^+ et en $+\infty$.

Exercice 14 – Gamma au voisinage de zéro et de l'infini

a) À l'aide de $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et de la continuité de Γ en 1, montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0^+.

b) Pour $1 \le x \le y$, montrer que $\Gamma(y) \ge \Gamma(x) - \frac{1}{x}$ (comparer les intégrandes sur $[1, +\infty[$).

c) En déduire $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.

Exercice 15 – Synthèse : la fonction exponentielle intégrale

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Montrer que F est continue et décroissante, et que $0 < F(x) \le \frac{1}{x}$.

b) En écrivant $xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$, montrer que $xF(x) \to 1$ en $+\infty$.

c) Montrer que $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t} + O(1) = \ln\frac{1}{x} + O(1)$ en 0^+.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Conclure sur les équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).