Plaquette 3 – Dérivation sous l'intégrale et calculs d'intégrales

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour calculer une intégrale I difficile, on l'**insère dans une famille** $F(x)$ (paramètre placé là où sa dérivée simplifie l'intégrande), on **dérive sous l'intégrale** (hypothèse de domination de $\partial_x h$ sur tout segment), on calcule $F'(x)$ (souvent une fraction rationnelle ou une exponentielle), puis on **intègre** en utilisant une valeur connue de F (en 0, ou une limite en $+\infty$ par convergence dominée). La même technique produit des **équations différentielles** vérifiées par F, qu'on résout ensuite, et des familles de formules par dérivations successives (moments gaussiens, $\int t^x \ln^n t$).

Exercice 1 – Arc tangente sur t fois un plus t carré

Pour $x \geq 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$ et C^1 sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{\pi}{2(1+x)}$ (éléments simples en t^2 pour $x \neq 1$).

c) En déduire $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

Exercice 2 – Logarithme de un plus x sinus carré

Pour $x > -1$, soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(1 + x\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est C^1 et que $F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.

b) Avec $u = \tan t$, montrer que $F'(x) = \frac{\pi}{2x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$ pour $x \neq 0$.

c) En déduire $F(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1+x}}{2}$ (poser $s = \sqrt{1+x}$).

Exercice 3 – Une gaussienne déformée

Pour $x > 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2 - x^2/t^2}\,\mathrm{d}t$ (on admet $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

a) Montrer que F est C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $F'(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2 - x^2/t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Avec $u = \frac{x}{t}$, montrer que $F'(x) = -2F(x)$.

c) En déduire $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ (continuité en 0 admise).

Exercice 4 – Laplace d'un quotient par t

Pour $x > 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 et calculer $F'(x)$.

b) Montrer que $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $F(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Exercice 5 – Puissances et logarithmes par dérivations successives

Pour $x > -1$, soit $F(x) = \int_0^1 t^x \, dt = \frac{1}{x+1}$.

a) Justifier que F est de classe C^∞ et que l'on peut dériver sous l'intégrale à tout ordre.

b) En déduire $\int_0^1 t^x (\ln t)^n \, dt = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

c) Application : $\int_0^1 t^2 \ln^3 t \, dt$.

Exercice 6 – Dérivée d'une transformée de Laplace

Soit f continue sur $[0, +\infty[$ et bornée, et $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \, dt$ pour $x > 0$.

a) Montrer que L est de classe C^∞ avec $L^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} \, dt$.

b) En déduire la transformée de Laplace de $t \sin t$ à partir de celle de $\sin t$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} t \sin t \, e^{-t} \, dt$.

Exercice 7 – Frullani avec un cosinus

Soient $a > 0$ et, pour $b > 0$, $F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)\cos t}{t} \, dt$.

a) Justifier la convergence et montrer que F est dérivable avec $F'(b) = \int_0^{+\infty} e^{-bt} \cos t \, dt$.

b) En déduire $F(b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b^2}{1+a^2}$.

c) Retrouver le cas sans cosinus ($\ln \frac{b}{a}$) en remplaçant $\cos t$ par 1 : quelle différence dans la méthode ?

Exercice 8 – Moments gaussiens par dérivation

Pour $a > 0$, soit $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

a) Justifier la dérivation sous l'intégrale à tout ordre.

b) En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-at^2} \, dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-at^2} \, dt$.

c) Généraliser : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-at^2} \, dt$.

Exercice 9 – Logarithme de un plus x carré t carré

Pour $x \geq 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2 t^2)}{1 + t^2} \, dt$.

a) Justifier la convergence et la dérivabilité sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2xt^2}{(1 + x^2 t^2)(1 + t^2)} \, dt = \frac{\pi}{1+x}$.

c) En déduire $F(x) = \pi \ln(1 + x)$, et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} \, dt$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – L'intégrale de Poisson

Pour $|x| < 1$, soit $F(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right) \mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est dérivable sur $]-1, 1[$.

b) Vérifier que $2x - 2\cos t = \frac{1}{x}\left((1 - 2x\cos t + x^2) - (1 - x^2)\right)$ pour $x \neq 0$, et, sachant $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2x\cos t + x^2} = \frac{\pi}{1 - x^2}$, en déduire $F' = 0$.

c) Conclure, puis calculer $F(x)$ pour $|x| > 1$ (factoriser x^2).

Exercice 11 – Arc tangente comme intégrale

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (domination indépendante de x).

b) Calculer $F'(x)$.

c) En déduire $F(x) = \arctan x$.

Exercice 12 – Dérivation à borne variable et équation différentielle

Soit g continue sur $\mathbb{R}$ et $y(x) = \int_0^x \sin(x - t) g(t) \mathrm{d}t$.

a) Rappeler la dérivée de $x \mapsto \int_0^x h(x, t) \mathrm{d}t$ pour h de classe C^1.

b) Calculer y' et y'', et montrer que $y'' + y = g$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

c) Application : résoudre $y'' + y = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 13 – Développement en série d'une intégrale à paramètre

Soit $F(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{xt^2} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F^{(n)}(0)$.

b) En intégrant terme à terme, montrer que $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!(2n + 1)}$ pour tout x.

c) En déduire une valeur approchée de $\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 14 – Une équation différentielle d'Euler

Pour $x \geq 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + xt} \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et que $F(0) = 1$.

b) Par une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1 + xt)^2} \mathrm{d}t = \frac{1 - F(x)}{x}$.

c) En écrivant $\frac{t}{(1 + xt)^2} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + xt} - \frac{1}{(1 + xt)^2}\right)$, montrer que $x^2 F'(x) + (1 + x)F(x) = 1$.

Exercice 15 – Synthèse : la fonction de Dawson

Soit $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sin(xt) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, impaire.

b) Par une intégration par parties dans $G'(x)$, montrer que $G'(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} G(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Résoudre cette équation : $G(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2/4}\int_0^x e^{u^2/4}\,du$.

d) En déduire $G(x) \sim \frac{1}{x}$ en $+\infty$ (montrer que $\int_0^x e^{u^2/4}\,du \sim \frac{2}{x}e^{x^2/4}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).