Plaquette 4 – Fonctions Gamma et Bêta, transformées de Laplace et de Fourier

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les fonctions définies par une intégrale à paramètre les plus importantes sont Γ, B, la **transformée de Laplace** $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ et la **transformée de Fourier** $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. On établit leurs propriétés par les théorèmes du chapitre (continuité, dérivation, limites sous l'intégrale) et par des **intégrations par parties** qui traduisent la dérivation en multiplication ($L(f') = xLf - f(0)$), ce qui transforme une équation différentielle en équation algébrique. Les changements de variable relient entre elles ces familles d'intégrales.

Exercice 1 – Transformée de Laplace des puissances

a) Pour $s > 0$ et $x > 0$, montrer que $\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\Gamma(s)}{x^s}$.

b) En déduire $L(t^n)(x)$ et $L\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)(x)$.

c) Trouver une fonction f (combinaison d'exponentielles) telle que $Lf(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ pour $x > 2$.

Exercice 2 – Résoudre une équation différentielle par Laplace

a) Pour f de classe C^1 avec f et f' bornées, montrer que $L(f')(x) = xLf(x) - f(0)$.

b) Soit y solution bornée de $y' + y = 1$, $y(0) = 0$. Montrer que $Ly(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

c) En déduire y, et vérifier. Même méthode pour $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exercice 3 – La formule de Gauss pour Gamma

Pour $x > 0$ et $n \geq 1$, soit $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

a) Avec $t = nu$, puis n intégrations par parties, montrer que $I_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

b) Par convergence dominée, montrer que $I_n(x) \to \Gamma(x)$.

c) En déduire la formule de Gauss et vérifier pour $x = 1$.

Exercice 4 – La fonction bêta aux entiers

On rappelle $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$ et $B(a+1,b) = \dfrac{a}{a+b}B(a,b)$.

a) Calculer $B(1,n)$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ pour $m, n \geq 1$, c'est-à-dire $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

c) Application : $\int_0^1 t^3(1-t)^4\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 (t(1-t))^n\,\mathrm{d}t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une autre forme de la fonction bêta

Pour $0 < a < 1$, soit $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $J(a)$ converge.

b) Avec $t = \frac{u}{1-u}$, montrer que $J(a) = B(a, 1-a)$.

c) Vérifier pour $a = \frac{1}{2}$ (on a calculé $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$), et montrer que $J(a) = J(1-a)$.

Exercice 6 – Intégrales de Wallis et fonction bêta

a) Avec $t = \sin^2\theta$, montrer que $\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\theta \cos^{2b-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}B(a,b)$ pour $a, b > 0$.

b) En déduire $W_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) En utilisant $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b}B(a,b)$ et $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi$, retrouver $W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$.

Exercice 7 – Transformée de Laplace du logarithme

a) Montrer que Γ est dérivable en 1 avec $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln t\, \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (on note $\Gamma'(1) = -\gamma$, γ constante d'Euler).

b) Pour $x > 0$, montrer que $L(\ln t)(x) = -\frac{\gamma + \ln x}{x}$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} \ln t\, \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 – Transformée de Fourier d'une exponentielle symétrique

Soit $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$.

a) Montrer que $\hat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

b) Vérifier que $\hat{f}$ est de classe C^∞ alors que f n'est pas dérivable en 0, et que $\hat{f}$ est intégrable.

c) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}$ et comparer à $2\pi f(0)$.

Exercice 9 – Transformée de Fourier d'une indicatrice

Soit $f = 1_{[-1,1]}$.

a) Calculer $\hat{f}(x)$.

b) Montrer que $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 en $\pm\infty$, mais n'est pas intégrable.

c) Que dire de $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}$ (semi-convergence) ?

Exercice 10 – Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f de classe C^1 sur $[a,b]$.

a) Par une intégration par parties, montrer que $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'|}{|x|}$.

b) En déduire que $\int_a^b f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \to 0$ quand $x \to +\infty$.

c) Application : limite de $\int_0^\pi t^2 \sin^2(xt)\,\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$ (linéariser).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Laplace d'une fonction périodique

Soit f continue, T-périodique sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que $Lf(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-Tx}}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ pour $x>0$ (découper en périodes).

b) Application : $f(t)=|\sin t|$ ($T=\pi$) ; montrer que $Lf(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-\pi x}}$.

c) Vérifier la limite de $xLf(x)$ en 0^+ (valeur moyenne de $|\sin|$).

Exercice 12 – La fonction digamma et les nombres harmoniques

Soit $\psi=\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ sur $]0,+\infty[$.

a) En dérivant $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, montrer que $\psi(x+1)=\psi(x)+\dfrac{1}{x}$.

b) En déduire $\psi(n+1)=\psi(1)+H_n$, puis $\Gamma'(n+1)=n!\,(H_n-\gamma)$ avec $\gamma=-\Gamma'(1)$.

c) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\ln t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $n=1,2$.

Exercice 13 – Inverser une transformée de Laplace rationnelle

On admet que L est injective sur les fonctions continues de croissance au plus exponentielle.

a) Calculer $L(t^n\mathrm{e}^{at})(x)$ pour $x>a$.

b) Trouver f telle que $Lf(x)=\dfrac{3x+1}{(x-1)^2(x+1)}$.

c) Vérifier en calculant Lf pour la fonction trouvée.

Exercice 14 – Laplace d'une fonction divisée par t

Soit f continue bornée sur $[0,+\infty[$ telle que $\dfrac{f(t)}{t}$ soit intégrable au voisinage de 0, et $g(x)=L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)(x)$.

a) Montrer que $g'(x)=-Lf(x)$ et que $g(x)\to 0$ en $+\infty$.

b) En déduire $g(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} Lf(u)\,\mathrm{d}u$.

c) Application : retrouver $L\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$ et calculer $L\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)(x)$.

Exercice 15 – Synthèse : étude de la fonction Gamma

On rassemble les propriétés de Γ sur $]0,+\infty[$.

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ et que $\Gamma''>0$.

b) Avec Cauchy-Schwarz appliqué à $t^{(x-1)/2}\mathrm{e}^{-t/2}$ et $\ln t\cdot t^{(x-1)/2}\mathrm{e}^{-t/2}$, montrer que $\Gamma'^2\le\Gamma\Gamma''$: $\ln\Gamma$ est convexe.

c) Montrer que Γ' s'annule en un unique $x_0\in\,]1,2[$, et donner le tableau de variations de Γ.

d) Rappeler les comportements en 0^+ et en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).