Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : méthode de Laplace, équations différentielles et intégrales célèbres

Intégrales à paramètre — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les grands résultats du chapitre combinent plusieurs techniques. La **méthode de Laplace** (changement de variable centré sur le maximum de l'intégrande, puis convergence dominée vers une gaussienne) donne des équivalents : Stirling, Wallis. Une intégrale à paramètre peut vérifier une **équation différentielle** (Bessel, chaleur, $F'' = F$) qu'on obtient en dérivant sous l'intégrale puis en **intégrant par parties en** t. Enfin, une **fonction auxiliaire astucieuse** (somme de deux intégrales à paramètre dont la dérivée est nulle) donne l'intégrale de Gauss. On soigne toujours les hypothèses : domination locale, continuité aux bornes.

Exercice 1 – L'équation de Bessel

Soit $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

a) Exprimer $F'(x)$ et $F''(x)$ sous forme d'intégrales.

b) Montrer, par une intégration par parties dans $\int_0^{\pi} \sin t \sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t$, que $F'(x) = -\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 t \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que $xF'' + F' + xF = 0$, avec $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$.

Exercice 2 – La formule de Stirling par la méthode de Laplace

Pour $x > 0$, $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Avec $t = x + \sqrt{x}\,u$, montrer que $\Gamma(x+1) = x^x \mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} h_x(u)\,\mathrm{d}u$, où $h_x(u) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}\,u\right)$.

b) Montrer que $h_x(u) \to \mathrm{e}^{-u^2/2}$, et (pour $x \geq 1$) que $h_x(u) \leq \mathrm{e}^{-u^2/2}$ si $u \leq 0$, $h_x(u) \leq \mathrm{e}^{-u^2/(2(1+u))}$ si $u \geq 0$.

c) En déduire $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\,(\frac{x}{\mathrm{e}})^x$, et en particulier $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$.

Exercice 3 – Équivalent des intégrales de Wallis

Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

a) Avec $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$, écrire $\sqrt{n}\,W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}u$.

b) Montrer que $\cos^n\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \to \mathrm{e}^{-u^2/2}$ et justifier la domination par $\mathrm{e}^{-u^2/2}$ (admettre $\cos v \leq \mathrm{e}^{-v^2/2}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

c) En déduire $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – L'intégrale elliptique complète

Pour $k \in [0,1[$, soit $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$.

a) Montrer que K est continue et croissante sur $[0,1[$, avec $K(0) = \frac{\pi}{2}$.

b) En développant $(1-u)^{-1/2}$ et en intégrant terme à terme, montrer que $K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 k^{2n}$.

c) Montrer que $K(k) \to +\infty$ quand $k \to 1^-$.

Exercice 5 – Continuité en zéro d'une transformée de Laplace semi-convergente

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 0$.

a) Soit g positive décroissante sur $[X,Y]$. Par une intégration par parties (ou le second théorème de la moyenne, admis), montrer que $\left|\int_X^Y g(t)\sin t\,\mathrm{d}t\right| \leq 2g(X)$ quand g est de classe C^1.

b) En déduire $\left|\int_X^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2}{X}$ pour tout $x \geq 0$.

c) Conclure que F est continue en 0, et donc que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (sachant $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ pour $x > 0$).

Exercice 6 – Équation de la chaleur pour une donnée cosinus

On admet $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\cos(as)\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-a^2/4}$. Pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, soit $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\cos\left(x + 2\sqrt{t}s\right)\mathrm{d}s$.

a) Montrer que $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t}\cos x$ (développer le cosinus).

b) Vérifier que $\partial_t u = \partial_x^2 u$ et $u(x,t) \to \cos x$ quand $t \to 0^+$.

c) Justifier directement la dérivation sous l'intégrale par rapport à x.

Exercice 7 – Méthode de Laplace élémentaire

Soit f continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

a) Avec $u = \sqrt{x}t$, montrer que $\sqrt{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}f\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}u$.

b) En déduire $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{f(0)}{\sqrt{x}}$ si $f(0) \neq 0$.

c) Application : équivalent de $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Exercice 8 – Moments de la loi Gamma

Pour $a > 0$, soit $p_a(x) = \frac{x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(a)}$ sur $]0,+\infty[$ (densité de la loi Gamma).

a) Vérifier que $\int_0^{+\infty} p_a = 1$ et calculer $m_k = \int_0^{+\infty} x^k p_a(x)\,\mathrm{d}x$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'espérance et la variance.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer la transformée de Laplace $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx} p_a(x)\,\mathrm{d}x$ pour $s > -1$, et retrouver m_1 en dérivant.

Exercice 9 – Une intégrale par symétrie

a) Avec $\theta \mapsto \frac{\pi}{4} - \theta$, montrer que $1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{2}{1+\tan\theta}$.

b) En déduire $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

c) En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 – Une intégrale avec x sinus x

Soit $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

a) Avec $x \mapsto \pi - x$, montrer que $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

b) Calculer cette dernière intégrale (poser $u = \cos x$).

c) En déduire I.

Exercice 11 – L'intégrale de Gauss par une fonction auxiliaire

Soit $f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que g est dérivable et que $g'(x) = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

b) Avec $u = xt$, montrer que $g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -f'(x)$.

c) En déduire $f + g = \frac{\pi}{4}$, puis $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12 – Transformée de Fourier de la gaussienne par série entière

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

a) Développer $\cos(xt)$ en série et justifier l'intégration terme à terme (vérifier $\sum \int |u_n| < +\infty$).

b) Avec $\int_0^{+\infty} t^{2n}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

c) Comparer avec la méthode par équation différentielle.

Exercice 13 – Laplace et une équation à second membre exponentiel

On cherche y de classe C^2, de croissance au plus exponentielle, solution de $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3t}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

a) Montrer que $L(y'')(x) = x^2 Ly(x) - xy(0) - y'(0)$ pour x assez grand.

b) En déduire $Ly(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

c) Décomposer en éléments simples et en déduire y ; vérifier les conditions initiales.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Quand la dérivation sous l'intégrale échoue

Soit $F(x) = \int_0^1 \sqrt{|x-t|}\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $F(x)$ pour $x \in [0,1]$.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ mais pas deux fois dérivable en 0.

c) Expliquer en termes de domination de ∂_x^2 de l'intégrande.

Exercice 15 – Synthèse : la transformée de Fourier de un sur un plus t carré

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, paire, et que $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

b) Pour $x > 0$, avec $u = xt$, écrire $F(x) = \int_0^{+\infty} g(x,u)\cos u\,\mathrm{d}u$ où $g(x,u) = \frac{x}{x^2+u^2}$, et justifier que F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ (domination sur $[a,b]$).

c) Vérifier que $\partial_x^2 g = -\partial_u^2 g$, et par deux intégrations par parties en u, montrer que $F'' = F$ sur $]0,+\infty[$.

d) En déduire $F(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).