Plaquette 3 – Calculs d'intégrales impropres : changements de variable et intégrations par parties

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Changement de variable. Si $\varphi:]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection C^1 strictement croissante, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Intégration par parties. Si uv a des limites finies aux bornes, $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature, et $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.

Références.

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\quad \Gamma(n+1)=n!,\quad \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Correction de l'exercice 1 – La relation fonctionnelle de Gamma

a) Avec $u=t^x$, $v'=\mathrm{e}^{-t}$ sur $[\varepsilon,X]$: $\int_\varepsilon^X t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_\varepsilon^X+x\int_\varepsilon^X t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Le crochet tend vers 0 ($x>0$), d'où

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

b) $\Gamma(1)=1$ et récurrence : $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$.

c) $u=2t$: $\int_0^{+\infty} t^5\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^6}\int_0^{+\infty}u^5\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{5!}{64}=\frac{120}{64}=\frac{15}{8}$.

Réponse. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1)=n!$; $\int_0^{+\infty}t^5\mathrm{e}^{-2t}=\frac{15}{8}$.

Correction de l'exercice 2 – Gamma aux demi-entiers

a) $\Gamma\left(\frac12\right)=\int_0^{+\infty}t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$; avec $t=u^2$, $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$:

$$\Gamma\left(\frac12\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{u}2u\,\mathrm{d}u=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

b) $\Gamma\left(\frac32\right)=\frac12\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac52\right)=\frac32\cdot\frac12\sqrt{\pi}=\frac34\sqrt{\pi}$.

c) Récurrence : $\Gamma\left(n+\frac12\right)=\frac{2n-1}{2}\cdots\frac12\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2^n}\sqrt{\pi}$, et $(2n-1)(2n-3)\cdots1=\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Réponse. $\Gamma(\frac12)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac32)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(n+\frac12)=\frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$.

Correction de l'exercice 3 – Une fraction en t puissance quatre

a) Intégrandes positives, continues, $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$. Avec $t=\frac1u$:

$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^{-4}}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4+1}=J$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On divise numérateur et dénominateur de $\frac{1+t^2}{1+t^4}$ par t^2, et $t^2+\frac{1}{t^2}=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2$.

c) $u=t-\frac{1}{t}$ est une bijection croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, avec $\mathrm{d}u=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$:

$$2I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},\qquad I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Réponse. $I=J=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\approx 1{,}1107$.

Correction de l’exercice 4 – Une intégrale nulle par symétrie

a) En 0 : équivalent à $\ln t$, intégrable. En $+\infty$: $\frac{\ln t}{1+t^2}=o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, intégrable.

b) $t=\frac{1}{u}$, $\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$: $I=\int_0^{+\infty}\frac{-\ln u}{1+u^{-2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=-\int_0^{+\infty}\frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u=-I$, donc $I=0$.

c) $t=au$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}\left(\ln a\cdot\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi\ln a}{2a}$$

Réponse. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}=0$ et $\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{a^2+t^2}=\frac{\pi\ln a}{2a}$.

Correction de l’exercice 5 – Puissances de 1 + t carré

a) $t=\tan\theta$, $\mathrm{d}t=(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$: $\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}=\cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

b) $I_1=\frac{\pi}{2}$, $I_2=\int_0^{\pi/2}\cos^2=\frac{\pi}{4}$, $I_3=\int_0^{\pi/2}\cos^4=\frac{3\pi}{16}$ (intégrales de Wallis).

c) $I_1=\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=2\int\frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^2}=2I_1-2I_2$, donc

$$I_2=\frac{I_1}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Réponse. $I_n=W_{2n-2}$; $I_1=\frac{\pi}{2}$, $I_2=\frac{\pi}{4}$, $I_3=\frac{3\pi}{16}$.

Correction de l’exercice 6 – Puissances du logarithme

a) $t=\mathrm{e}^{-u}$ envoie $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$ (décroissante), $\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$:

$$\int_0^1(\ln t)^n\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}(-u)^n\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=(-1)^n n!$$

b) Même changement : $\int_0^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-(a+1)u}\mathrm{d}u=\frac{2}{(a+1)^3}$ (avec $v=(a+1)u$).

c) $a=\frac{1}{2}$: $\frac{2}{(3/2)^3}=\frac{16}{27}$.

Réponse. $\int_0^1(\ln t)^n=(-1)^n n!$; $\int_0^1 t^a\ln^2 t=\frac{2}{(a+1)^3}$; $\int_0^1\sqrt{t}\ln^2 t=\frac{16}{27}$.

Correction de l’exercice 7 – Cosinus hyperbolique inverse

a) $u=\mathrm{e}^t$, $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{u}$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

b) $\frac{1}{\mathrm{ch}t}=\frac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$, fonction paire : $\int_{-\infty}^{+\infty}=2\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Une primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est th, d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2 t} = 1$.

Réponse. a) $\frac{\pi}{4}$; b) π ; c) 1.

Correction de l'exercice 8 – Intégrales de Frullani

a) On sépare (intégrales sur un segment) et on pose $u = at$ dans la première, $u = bt$ dans la seconde : $\int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$, puis on réarrange les bornes.

b) $\mathrm{e}^{-b\varepsilon}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} \le \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \le \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\frac{b}{a}$: limite $\ln\frac{b}{a}$. Et $0 \le \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \le \frac{\mathrm{e}^{-aX}}{aX}(b-a)X \to 0$.

c) Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{b}{a}$; en particulier $\ln 2$.

Correction de l'exercice 9 – Une intégrale par parties délicate

a) En 0 : $\ln(1-t^2) \sim -t^2$, intégrande $\to -1$. En 1 : $\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t)$, intégrable (singularité logarithmique).

b) $v' = \frac{1}{t^2}$. Le crochet $\ln(1-t^2)\frac{t-1}{t}$ tend vers 0 en 0 (équivalent t) et en 1 ($(1-t)\ln(1-t) \to 0$). Donc

$$I = -\int_0^1 \frac{-2t}{1-t^2}\cdot\frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2(t-1)}{(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t = -2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

c) $I = -2\ln 2 \approx -1{,}386$.

Réponse. $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -2\ln 2$.

Correction de l'exercice 10 – Un produit polynôme exponentielle sinus

a) Avec $z = 1 - i$, $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t\mathrm{e}^{-zt}}{z}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z^2}$ (le crochet tend vers 0 car $|\mathrm{e}^{-zt}| = \mathrm{e}^{-t}$).

b) $z^2 = (1-i)^2 = -2i$, donc $\frac{1}{z^2} = \frac{i}{2}$:

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

c) Par récurrence (même IPP), $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{z^{n+1}}$.

Réponse. $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\sin t = \frac{1}{2}$, $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\cos t = 0$; $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-zt} = \frac{n!}{z^{n+1}}$.

Correction de l'exercice 11 – Fraction rationnelle sur la droite

a) $t^2 + 2t + 5 = (t+1)^2 + 4$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2 + 4} = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{t+1}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

b) Avec $u = t + 1$: $\int \frac{u-1}{(u^2+4)^2}\,\mathrm{d}u$. La partie impaire $\frac{u}{(u^2+4)^2}$ est intégrable, d'intégrale

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

nulle. Pour $\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+4)^2}$, $u = 2\tan\theta$ donne $\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{16}$. Résultat : $-\frac{\pi}{16}$.

c) Non : $\frac{t}{t^2+2t+5} \sim \frac{1}{t}$ en $+\infty$, non intégrable (même si une « valeur principale » symétrique existerait).

Réponse. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{16}$; c) diverge (équivalent $\frac{1}{t}$).

Correction de l’exercice 12 – Arc tangente sur un plus t carré

a) $u = \arctan t$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{8}$$

b) $\int_0^{\pi/4} u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{32}$.

c) $\int_0^{\pi/2} u^2\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^3}{24}$.

Réponse. a) $\frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{\pi^2}{32}$; c) $\frac{\pi^3}{24}$.

Correction de l’exercice 13 – Une intégrale gaussienne déplacée

a) $u = \sqrt{a}\,t$: $\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

b) $-t^2+2t = -(t-1)^2+1$, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+2t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}\sqrt{\pi}$$

c) Par parties avec $u = t$, $v' = t\mathrm{e}^{-t^2}$, $v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$: $\int t^2\mathrm{e}^{-t^2} = \left[-\frac{t}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse. a) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; b) $\mathrm{e}\sqrt{\pi}$; c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction de l’exercice 14 – Réduction par le changement t vers 1 sur t

a) $t = \frac{1}{u}$: $\int_0^{+\infty} \frac{f(1/u)}{1+u^{-2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{-f(u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$, donc l’intégrale est égale à son opposée.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge ($\ln t$ en 0, $o(t^{-3/2})$ en $+\infty$) et, avec $t = \frac{1}{u}$, $\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}$: elle vaut son opposée, donc 0.

c) Avec $t = \frac{1}{u}$: $\frac{1}{1+u^{-\alpha}} = \frac{u^\alpha}{1+u^\alpha}$, d’où $I = \int \frac{u^\alpha\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}$. En ajoutant :

$$2I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}, \qquad I = \frac{\pi}{4}$$

Réponse. Intégrale nulle par antisymétrie $t \mapsto \frac{1}{t}$; $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \frac{\pi}{4}$ pour tout α.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : racines de la tangente et de la cotangente

a) En $\frac{\pi}{2}$: $\sqrt{\tan t} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-t}}$, intégrable. Avec $t = \arctan u^2$, $\mathrm{d}t = \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u\cdot\frac{2u}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx 2{,}221$.

c) $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ échange tan et $\frac{1}{\tan}$: $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, et la somme vaut $\pi\sqrt{2}$.

Réponse. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\tan t}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; somme $\pi\sqrt{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).