Plaquette 1 – Convergence, critères de comparaison et intégrales de référence

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. $\int_a^b f$ est **convergente** si $\lim_{X \to b^-} \int_a^X f$ existe et est finie (et symétriquement en a). Sur $]a\,;b[$ on **coupe** en un point intérieur et l'on exige la convergence des deux morceaux.

Intégrales de référence.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1 \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\ (\lambda > 0) \qquad \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -1$$

Critères (fonctions positives).

- **Comparaison** : $0 \leq f \leq g$; si $\int g$ converge, $\int f$ aussi.
- **Équivalents** : $f \sim g$ au **voisinage du point problématique** (avec $f, g \geq 0$) $\Rightarrow$ même nature.
- **Négligeabilité** : $f = o(g)$ et $\int g$ convergente $\Rightarrow \int f$ convergente.
- **Croissances comparées** : e^{-t} l'emporte sur toute puissance ; ln est négligeable devant toute puissance.

Fonctions de signe quelconque.

- **Convergence absolue** : $\int |f|$ converge $\Rightarrow \int f$ converge.
- **Semi-convergence** : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge (IPP ou critère d'Abel) sans converger absolument.

Techniques de calcul.

- **Primitive** puis passage à la limite.
- **IPP** : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$, sous réserve de convergence du crochet.
- **Changement de variable** C^1 strictement monotone : conserve la nature et la valeur.
- **Intégrales célèbres** : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 1 – Intégrale de Riemann en l'infini

- **Critère** : $\alpha = 3 > 1$, donc l'intégrale **converge**.
- **Calcul** :

$$\int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2X^2}$$

- Quand $X \to +\infty$, cette quantité tend vers $\frac{1}{2}$.
- **Valeur** : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Formule générale** : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ pour $\alpha > 1$ ✓ (ici $\frac{1}{2}$).

— **Frontière** : pour $\alpha = 1$, la primitive est $\ln X \to +\infty$ — divergence.

Réponse. Converge, et vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Singularité en 0

— **Première intégrale** : $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, elle **converge**.

$$\int_\varepsilon^1 t^{-1/2}\mathrm{d}t = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \longrightarrow 2$$

— Donc $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$.

— **Seconde intégrale** : $\alpha = 2 \geq 1$, elle **diverge**.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{\varepsilon} - 1 \longrightarrow +\infty$$

— **À retenir** : les critères sont **inversés** entre 0 et $+\infty$. En 0, la convergence demande $\alpha < 1$; en $+\infty$, elle demande $\alpha > 1$.

— **Conséquence** : $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ **diverge pour tout** α — aucune valeur ne convient aux deux bouts.

Réponse. La première converge (vaut 2), la seconde diverge.

Correction de l'exercice 3 – Comparaison par équivalents

La fonction est **positive** sur $[1 ; +\infty[$: les équivalents s'appliquent.

— **En** $+\infty$: $\frac{t+1}{t^3+t} \sim \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2}$.

— $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ **converge** ($\alpha = 2 > 1$).

— Par comparaison par équivalents, l'intégrale **converge**.

— **Pas de problème en** 1 : la fonction y est continue, la borne 1 n'est pas singulière.

— **Contrôle d'ordre de grandeur** : l'intégrande vaut 1 en $t = 1$ et décroît comme $\frac{1}{t^2}$; la valeur de l'intégrale est de l'ordre de 1.

— **Méthode** : toujours préciser **où** l'équivalent est pris — un équivalent en $+\infty$ ne dit rien du comportement en 0.

Réponse. Converge ($f \sim \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$).

Correction de l'exercice 4 – Deux points problématiques

Il y a **deux** points à examiner : 0 et $+\infty$. On coupe en 1.

— **En** 0 : $\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) ✓

— **En** $+\infty$: $\frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} \sim \frac{1}{t^{3/2}}$, et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$) ✓

— **Conclusion** : l'intégrale **converge**.

— **Calcul exact** : le changement $t = u^2$ ($\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$) donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $\pi \approx 3{,}1416$, valeur plausible pour une fonction décroissant de $+\infty$ en 0 à 0 en $+\infty$ ✓

Réponse. Converge et vaut π.

Correction de l'exercice 5 – Croissances comparées

— **Croissances comparées** : $t^{10}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, car $t^{12}\mathrm{e}^{-t} \to 0$.

— $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, donc par **négligeabilité** l'intégrale **converge**.

— **Valeur** : par IPP répétées, $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$ — c'est la **fonction Gamma**, $\Gamma(n+1) = n!$.

— Ici $\int_0^{+\infty} t^{10}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 10! = 3\,628\,800$.

— **Principe général** : e^{-t} **écrase** toute puissance. Toute intégrale $\int^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ converge pour $\lambda > 0$ et P polynomial.

— **Attention à la borne** 0 : ici pas de problème, $t^{10}\mathrm{e}^{-t}$ y est continue.

Réponse. Converge ; $\int_0^{+\infty} t^{10}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 10! = 3\,628\,800$.

Correction de l'exercice 6 – Intégrale avec logarithme

— **Problème en** 0 : $\ln t \to -\infty$.

— **Convergence** : $|\ln t| = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en 0^+ (croissances comparées, $\sqrt{t}\ln t \to 0$), et $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge. Donc l'intégrale **converge absolument**.

— **Calcul par IPP** : une primitive de ln est $t\ln t - t$, donc

$$\int_\varepsilon^1 \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t - t]_\varepsilon^1 = -1 - (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon)$$

— Or $\varepsilon\ln\varepsilon \to 0$ et $\varepsilon \to 0$: la limite est -1.

— **Valeur** : $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -1$.

— **Contrôle de signe** : $\ln t < 0$ sur $]0\,;1[$, donc l'intégrale doit être **négative** ✓

Réponse. Converge et vaut -1.

Correction de l'exercice 7 – Semi-convergence

Convergence. On intègre par parties sur $[1\,;X]$:

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

— Le crochet converge : $\dfrac{\cos X}{X} \to 0$.

— L'intégrale restante converge **absolument** : $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \le \dfrac{1}{t^2}$, intégrable.

— Donc l'intégrale **converge**.

Non-absolue convergence. Sur $\left[k\pi + \frac{\pi}{4}\,;k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$, $|\sin t| \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi/2}{(k+1)\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4(k+1)}$$

— La série $\sum \dfrac{1}{k+1}$ **diverge**, donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t = +\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : l'intégrale est **semi-convergente**. Sa valeur sur $]0\,;+\infty[$ est $\frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet).

Réponse. Semi-convergente : IPP pour la convergence, minoration par blocs pour $\int |f| = +\infty$.

Correction de l'exercice 8 – Changement de variable

— **Convergence** : en $+\infty$, $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}} \sim \mathrm{e}^{-t}$, intégrable ; pas de problème en 0.

— **Changement de variable** : $u = \mathrm{e}^{-t}$, donc $\mathrm{d}u = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$.

— L'intégrande devient $\frac{1}{1+\frac{1}{u}} = \frac{u}{u+1}$, et les bornes t:$0 \to +\infty$ donnent u:$1 \to 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^{t}} = \int_0^{1} \frac{u}{u+1} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \ln 2$$

— **Valeur** : $\ln 2 \approx 0{,}693$.

— **Contrôle de vraisemblance** : l'intégrande vaut 0,5 en $t = 0$ et décroît vite ; une aire d'environ 0,7 est cohérente ✓

— **Méthode alternative** : écrire $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{t}} = \mathrm{e}^{-t}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}$ et reconnaître une forme $\frac{-u'}{u}$.

Réponse. $\ln 2 \approx 0{,}693$.

Correction de l'exercice 9 – Intégrale de Gauss

Convergence. Pour $t \geq 1$: $t^2 \geq t$, donc $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$, dont l'intégrale converge.

— Sur $[0\,;1]$ la fonction est continue : pas de problème.

— L'intégrale **converge**.

Encadrement.

— **Majoration** : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \leq \int_0^{1} 1\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}368$.

— **Minoration** : sur $[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geq \mathrm{e}^{-t}$, donc l'intégrale est $\geq 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$.

— **Valeur exacte** : $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}8862$, bien dans l'encadrement $[0{,}632\,;1{,}368]$ ✓

— **Remarque** : e^{-t^2} n'a **pas** de primitive élémentaire ; le calcul exact passe par un changement en coordonnées polaires sur $\mathbb{R}^2$.

— **Importance** : cette intégrale normalise la **loi normale** en probabilités.

Réponse. Converge ; valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0{,}886$, encadrée par 0,632 et 1,368.

Correction de l'exercice 10 – Intégrale et série

La fonction $f(t) = \frac{1}{t^2}$ est **positive décroissante** : on encadre par comparaison série-intégrale.

— Pour $n \geq 1$: $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ (la seconde pour $n \geq 2$).

— **Sommation** :

$$\int_1^{+\infty} f = 1 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{+\infty} f = 2$$

— **Vérification** : $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$, bien dans $[1\,;2]$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Portée** : la comparaison série-intégrale donne à la fois la **nature** (les deux convergent) et un **encadrement** exploitable numériquement.
— **Attention** : l'intégrale et la somme ne sont **pas égales** — l'écart 0,645 est ici substantiel.

Réponse. $1 \leq \sum \dfrac{1}{n^2} \leq 2$, la somme valant $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1{,}645$.

Correction de l'exercice 11 – Intégrale à paramètre (nature)

Deux points à étudier.

— **En 0** : $\dfrac{t^\alpha}{1+t^3} \sim t^\alpha$. L'intégrale $\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow \alpha > -1$.
— **En $+\infty$** : $\dfrac{t^\alpha}{1+t^3} \sim t^{\alpha-3}$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-3}\mathrm{d}t$ converge $\Leftrightarrow 3-\alpha > 1$, soit $\alpha < 2$.
— **Conclusion** : convergence **si et seulement si** $-1 < \alpha < 2$.
— **Contrôle aux bornes** : $\alpha = -1$ donne $\int_0 \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$: divergence ✓ ; $\alpha = 2$ donne $\int^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$: divergence ✓
— **Exemple** : $\alpha = 0$ convient, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1{,}209$.

Réponse. Convergence si et seulement si $-1 < \alpha < 2$.

Correction de l'exercice 12 – Intégrales de Bertrand

a) Avec $u = \ln t$: $\displaystyle\int_2^X \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$, qui converge quand $X \to +\infty$ si et seulement si $\beta > 1$ (intégrale de Riemann en $+\infty$).

b) $u = \dfrac{1}{t}$ envoie $]0, \tfrac{1}{2}]$ sur $[2, +\infty[$, avec $\dfrac{\mathrm{d}t}{t} = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$ et $|\ln t| = \ln u$:

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^\beta} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u)^\beta}$$

même nature : convergence si et seulement si $\beta > 1$.

c) Si $\alpha > 1$: $\dfrac{1}{t^\alpha \ln t} \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t \geq \mathrm{e}$, convergence. Si $\alpha = 1$: divergence par a) ($\beta = 1$). Si $\alpha < 1$: $\dfrac{1}{t^\alpha \ln t} \geq \dfrac{1}{t \ln t}$ pour t grand, divergence.

Réponse. $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^\beta}$ convergent ssi $\beta > 1$; $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln t}$ ssi $\alpha > 1$.

Correction de l'exercice 13 – Intégrale du logarithme du sinus

a) En 0^+, $\sin t \sim t$ donc $\ln(\sin t) = \ln t + \ln \dfrac{\sin t}{t} = \ln t + o(1)$, et $\int_0 \ln t$ converge : I converge (intégrande négative).

b) $t \mapsto \dfrac{\pi}{2} - t$ échange les deux intégrales. En les ajoutant :
$2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}t$.

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = I$ (avec $u = 2t$, et symétrie de sin par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$). Donc

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\ln 2, \qquad I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Réponse. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Exponentielle amortie et sinus

a) $|e^{-t}\sin t| \le e^{-t}$, intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) $\int_0^X e^{(-1+i)t}\,dt = \frac{e^{(-1+i)X}-1}{-1+i} \to \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$, donc

$$I = \mathrm{Im}\frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}$$

c) $\int_0^{+\infty} e^{(-a+ib)t}\,dt = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$, dont la partie réelle donne $\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\,dt = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Réponse. $I = \frac{1}{2}$; $\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\,dt = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : calcul par IPP

Convergence : par croissances comparées, $t^k e^{-2t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ pour tout k.

Calcul de I — IPP avec $u' = e^{-2t}$, $v = t$:

$$I = \left[-\frac{te^{-2t}}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2t}dt = 0 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

— Le crochet est nul aux deux bornes ($te^{-2t} \to 0$ en $+\infty$).

Calcul de J — même IPP avec $v = t^2$:

$$J = 0 + \int_0^{+\infty} te^{-2t}dt = I = \frac{1}{4}$$

— Attention au coefficient : $J = \left[-\frac{t^2e^{-2t}}{2}\right] + \int_0^{+\infty} te^{-2t}dt = I = \frac{1}{4}$.

— **Contrôle par la formule générale** : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

— $n=1, \lambda=2$: $\frac{1}{4}$ ✓ ; $n=2, \lambda=2$: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ✓

— **Lecture probabiliste** : pour une loi **exponentielle** de paramètre 2, l'espérance vaut $\frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{2}$, d'où une variance de $\frac{1}{4}$.

Réponse. $I = J = \frac{1}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).