Plaquette 4 – Intégrabilité, semi-convergence et liens avec les séries

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Découpage en périodes. Pour f continue sur $[0,+\infty[$ et $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f$:

$$\int_0^{+\infty} f \text{ converge} \Leftrightarrow \sum u_k \text{ converge} \quad (\text{si } \sup_{k\pi \le x \le (k+1)\pi} \int_{k\pi}^{x} |f| \to 0)$$

Abel pour les intégrales. Si f est C^1, décroissante de limite nulle, et g continue de primitive G bornée, alors $\int^{+\infty} fg$ converge (par parties : $\int fg = [fG] - \int f'G$).

Série-intégrale. Pour f positive décroissante, $\sum f(n)$ et $\int^{+\infty} f$ ont même nature, et $\int_{n+1}^{+\infty} f \le \sum_{k>n} f(k) \le \int_n^{+\infty} f$.

Intégrabilité et produits. $|fg| \le \frac{f^2+g^2}{2}$; Cauchy-Schwarz : $\left(\int |fg|\right)^2 \le \int f^2 \int g^2$.

Correction de l'exercice 1 – Intégrable sans tendre vers zéro

a) Les supports sont disjoints (de demi-largeur $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{4}$), donc au voisinage de chaque point au plus un triangle est non nul : f est continue et positive, et $f(n) = 1$.

b) Chaque triangle a pour aire $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^2} \cdot 1 = \frac{1}{n^2}$, et sur $[0,X]$ l'intégrale est une somme finie d'aires, croissante en X :

$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n \ge 2} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

c) Non : f est intégrable mais $f(n) = 1$ ne tend pas vers 0. Contrairement aux séries, la condition « terme général $\to 0$ » n'est pas nécessaire.

Réponse. f intégrable ($\int f = \frac{\pi^2}{6} - 1$) alors que $f(n) = 1$: une fonction intégrable ne tend pas forcément vers 0.

Correction de l'exercice 2 – Quand l'intégrabilité force la limite nulle

a) f décroissante a une limite $\ell \in [-\infty,+\infty[$; si $\ell \neq 0$, $|f| \ge \frac{|\ell|}{2}$ (ou ≥ 1) au voisinage de $+\infty$, non intégrable. Donc $\ell = 0$, et $f \ge \ell = 0$.

b) Par décroissance, $f(t) \ge f(x)$ sur $\left[\frac{x}{2}, x\right]$, d'où la minoration. Le membre de droite tend vers 0 (reste d'une intégrale convergente), donc $xf(x) \to 0$.

c) Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ et $x_n \to +\infty$ avec $|f(x_n)| \ge \varepsilon$; par uniforme continuité, $|f| \ge \frac{\varepsilon}{2}$ sur $[x_n - \delta, x_n + \delta]$, de signe constant, donc

$$\left| \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f \right| \ge \varepsilon\delta$$

ce qui contredit le critère de Cauchy pour l'intégrale convergente.

Réponse. Décroissante intégrable : $f \to 0$ et même $xf(x) \to 0$; uniformément continue

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

intégrable : $f \to 0$.

Correction de l'exercice 3 – L'intégrale de Fresnel

a) $u = t^2$, bijection croissante C^1 de $[1, +\infty[$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$. Par parties,
$\int_1^X \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} = \left[-\frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos u}{4u^{3/2}}$, et le dernier intégrande est intégrable : convergence.

b) Non : $\frac{|\sin u|}{2\sqrt{u}} \geq \frac{\sin^2 u}{2\sqrt{u}} = \frac{1-\cos 2u}{4\sqrt{u}}$, et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{4\sqrt{u}} = +\infty$$

(le terme en $\cos 2u$ converge) : pas d'intégrabilité.

c) $\sin(t^2)$ n'a pas de limite (elle prend les valeurs ± 1 arbitrairement loin) : l'intégrale converge grâce à l'oscillation de plus en plus rapide, sans que l'intégrande tende vers 0.

Réponse. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}$ converge, non absolument ; $\sin t^2$ n'a pas de limite.

Correction de l'exercice 4 – Un équivalent trompeur

a) $\frac{f}{\sin t/\sqrt{t}} = \frac{1}{1+\sin t/\sqrt{t}} \to 1$ là où $\sin t \neq 0$; la convergence de $\int \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ s'obtient par parties (Abel).

b) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ avec $x = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$:

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

c) $\int \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ converge, $\int O(t^{-3/2})$ converge absolument, et $\frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$ a une intégrale divergente : $\int_2^{+\infty} f$ diverge. Les équivalents ne valent que pour des fonctions de signe constant.

Réponse. $f = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + O(t^{-3/2})$: divergence, malgré l'« équivalent » $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$.

Correction de l'exercice 5 – Une série très lentement divergente

a) Avec $u = \ln(\ln t)$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t}$: une primitive est $\ln(\ln(\ln t))$.

b) $f(t) = \frac{1}{t \ln t \ln\ln t}$ est positive et décroissante sur $[16, +\infty[$ (produit de fonctions positives croissantes au dénominateur), et

$$\int_{16}^X f = \ln\ln\ln X - \ln\ln\ln 16 \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

la série diverge (atteindre 10 demanderait n de l'ordre de $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{10}}}$).

c) Primitive $-\frac{1}{\ln\ln t}$, de limite finie : convergence.

Réponse. $\sum \frac{1}{n \ln n \ln\ln n}$ diverge (primitive $\ln\ln\ln t$) ; avec $(\ln\ln n)^2$, convergence.

Correction de l'exercice 6 – Sinus cardinal par découpage en périodes

a) $t = u + k\pi$ et $\sin(u + k\pi) = (-1)^k \sin u$. Pour k croissant, l'intégrande positive $\frac{\sin u}{u + k\pi}$ décroît ; et $a_k \leq \frac{2}{k\pi} \to 0$ ($k \geq 1$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Critère spécial : $\sum (-1)^k a_k$ converge, et pour $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, $\int_0^x$ est comprise entre deux sommes partielles consécutives, donc l'intégrale converge vers la somme I, encadrée par les sommes partielles : $a_0 - a_1 < I < a_0 = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \approx 1{,}852$.

c) $u + k\pi \le (k+1)\pi$ sur $[0, \pi]$, donc

$$a_k \ge \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

et $\int_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} = \sum_{k \le n} a_k \to +\infty$.

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \sum (-1)^k a_k$ converge (et vaut $\frac{\pi}{2}$), mais $\sum a_k$ diverge : pas d'intégrabilité.

Correction de l'exercice 7 – Lemme d'Abel pour les intégrales

a) Intégration par parties sur un segment.

b) $|f(X)G(X)| \le Mf(X) \to 0$ et $|f'G| \le -Mf'$ (car $f' \le 0$), avec

$$\int_a^X -f' = f(a) - f(X) \longrightarrow f(a)$$

donc $\int f'G$ converge absolument. Ainsi $\int_a^{+\infty} fg$ converge.

c) $f = \frac{1}{\ln t}$ sur $[2, +\infty[$, $g = \sin$, $G = -\cos$: convergence. $f = t^{-0{,}01}$, $g = \cos$: convergence (même si f décroît très lentement).

Réponse. Par parties : $\int^{+\infty} fg$ converge ; $\int \frac{\sin t}{\ln t}$ et $\int \frac{\cos t}{t^{0{,}01}}$ convergent.

Correction de l'exercice 8 – Une moyenne pondérée d'une fonction intégrable

a) On coupe en A : sur $[0, A]$, $t \le A$; sur $[A, X]$, $\frac{t}{X} \le 1$.

b) Soit $\varepsilon > 0$; on choisit A avec $\int_A^{+\infty} |f| \le \varepsilon$, puis X assez grand pour que $\frac{A}{X}\int_0^A |f| \le \varepsilon$: la quantité est $\le 2\varepsilon$.

c) $\int_0^X t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - (X+1)\mathrm{e}^{-X}$, donc

$$\frac{1}{X}\int_0^X t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - (X+1)\mathrm{e}^{-X}}{X} \longrightarrow 0$$

conformément à b).

Réponse. Découpage en A : $\frac{1}{X}\int_0^X tf(t)\,\mathrm{d}t \to 0$; pour e^{-t}, $\frac{1 - (X+1)\mathrm{e}^{-X}}{X} \to 0$.

Correction de l'exercice 9 – Le carré du sinus cardinal

a) En 0, l'intégrande tend vers 1 ; en $+\infty$, elle est majorée par $\frac{1}{t^2}$.

b) $u = \sin^2 t$, $v' = \frac{1}{t^2}$, $v = -\frac{1}{t}$: $\int_\varepsilon^X \frac{\sin^2 t}{t^2} = \left[-\frac{\sin^2 t}{t}\right]_\varepsilon^X + \int_\varepsilon^X \frac{2\sin t\cos t}{t}$, le crochet tendant vers 0 ($\frac{\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon} \sim \varepsilon$).

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ (avec $u = 2t$). Plus généralement, pour $a > 0$, $u = at$ donne $\frac{\pi}{2}$, et par imparité,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(a)$$

(nulle pour $a = 0$). Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t} = \frac{\pi}{2}$; $\int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a$.

Correction de l’exercice 10 – Intégrabilité d’une fonction et de son carré

a) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$, mais $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

b) $f(t) = \frac{1}{t}$: $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1$, mais $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge.

c) Si $|f| \le M$, alors

$$f^2 \le M|f|$$

et l’on conclut par comparaison. Sur un intervalle borné, l’intégrabilité de f^2 entraîne celle de f (Cauchy-Schwarz), mais pas sur un intervalle non borné.

Réponse. $\frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0,1]$; $\frac{1}{t}$ sur $[1,+\infty[$; f bornée intégrable $\Rightarrow f^2 \le M|f|$ intégrable.

Correction de l’exercice 11 – Cauchy-Schwarz pour une moyenne harmonique

a) Sur $[1,X]$, Cauchy-Schwarz donne $\left(\int_1^X \frac{|f|}{t}\right)^2 \le \int_1^X f^2 \int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \le \int_1^{+\infty} f^2 \cdot 1$: la fonction croissante $X \mapsto \int_1^X \frac{|f|}{t}$ est majorée.

b) Non : $\frac{1}{\sqrt{t}}$ n’est pas de carré intégrable et l’argument tombe. Contre-exemple : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}\ln(\mathrm{e}t)}$, dont le carré $\frac{1}{t\ln^2(\mathrm{e}t)}$ est intégrable (Bertrand), alors que $\frac{f}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t\ln(\mathrm{e}t)}$ ne l’est pas.

c) $\int_1^{+\infty} t^{-1,2} = 5$ et $\int_1^{+\infty} t^{-1,6} = \frac{5}{3}$, avec $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \approx 2{,}78 \le 5$ ✓.

Réponse. $\left(\int \frac{|f|}{t}\right)^2 \le \int f^2$; faux avec $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ($f = \frac{1}{\sqrt{t}\ln(\mathrm{e}t)}$).

Correction de l’exercice 12 – Intégrales et séries alternées

a) $\frac{1}{1+t^a} = \sum_{k=0}^{N} (-t^a)^k + \frac{(-t^a)^{N+1}}{1+t^a}$, puis on intègre ; le reste vérifie

$$|R_N| \le \int_0^1 t^{a(N+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a(N+1)+1}$$

b) $R_N \to 0$.

c) $a = 1$: $\sum \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$. $a = 2$: $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Réponse. $\sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$; $\ln 2$ pour $a = 1$, $\frac{\pi}{4}$ pour $a = 2$.

Correction de l’exercice 13 – Équivalent de la queue de la gaussienne

a) $\mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{-2t} \cdot (-2t\mathrm{e}^{-t^2})$: avec $u = -\frac{1}{2t}$, $v' = -2t\mathrm{e}^{-t^2}$, $v = \mathrm{e}^{-t^2}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$R(x) = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Le dernier terme est positif et majoré par $\frac{1}{2x^2}R(x)$. Donc $R(x)\left(1+\frac{1}{2x^2}\right) \geq \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} \geq R(x)$, et le rapport tend vers 1.

c) $\frac{\mathrm{e}^{-9}}{6} \approx 2{,}06 \times 10^{-5}$, et la valeur exacte $R(3) \approx 1{,}96 \times 10^{-5}$ (écart relatif $\approx \frac{1}{2\cdot 9}$).

Réponse. $R(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$; $R(3) \approx 2 \times 10^{-5}$.

Correction de l’exercice 14 – Comparaison série-intégrale avec contrôle du reste

a) Pour $k \geq n+1$: $\int_k^{k+1} f \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f$, puis on somme.

b) $\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan n = \arctan \frac{1}{n}$, donc

$$\arctan \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k>n} \frac{1}{k^2+1} \leq \arctan \frac{1}{n}$$

c) Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{1}{n}$: le reste est équivalent à $\frac{1}{n}$.

Réponse. $\arctan \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k>n} \frac{1}{k^2+1} \leq \arctan \frac{1}{n}$, reste $\sim \frac{1}{n}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : l’intégrale de Dirichlet

a) $2\sin\frac{t}{2}\cos(kt) = \sin\left((k+\frac{1}{2})t\right) - \sin\left((k-\frac{1}{2})t\right)$: la somme télescope, d’où la formule. En intégrant sur $[0,\pi]$: $\int_0^{\pi}\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0$ pour $k \geq 1$, il reste $\frac{\pi}{2}$.

b) Avec $\lambda = n+\frac{1}{2}$: $\int_0^{\pi}\varphi\sin(\lambda t) = \left[-\frac{\varphi\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi}\varphi'\cos(\lambda t)$, et

$$\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{2\|\varphi\|_\infty + \pi\|\varphi'\|_\infty}{\lambda} \to 0$$

c) Par a) et b), $\int_0^{\pi}\frac{\sin(\lambda t)}{t}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$, et $u = \lambda t$ donne $\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$. L’intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}$ convergeant (exercice 6), sa valeur est la limite le long de la suite $\lambda\pi \to +\infty$: $\frac{\pi}{2}$.

Réponse. Noyau de Dirichlet + lemme de Riemann-Lebesgue : $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).