Plaquette 2 – Nature d'une intégrale impropre : comparaison, équivalents et paramètres

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Références.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1, \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

— $\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ $(b>0)$ converge $\Leftrightarrow a > -1$; $\int_0^1 |\ln t|^k\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $k \geq 0$.

Comparaison (fonctions positives au voisinage de la borne) : $f \leq g$ et $\int g$ converge $\Rightarrow \int f$ converge ; $f \sim g \Rightarrow$ même nature ; $f = o(g)$ avec $\int g$ convergente $\Rightarrow \int f$ converge.

Convergence absolue. $\int |f|$ convergente $\Rightarrow \int f$ convergente.

Correction de l'exercice 1 – L'intégrale d'Euler de seconde espèce

a) $t^2 \cdot t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \to 0$ en $+\infty$ (croissances comparées), donc $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$: convergence pour tout x.

b) En 0, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \sim t^{x-1}$, positive :

$$\int_0 t^{x-1}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow 1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0$$

c) $\Gamma(x)$ est définie si et seulement si $x > 0$. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Réponse. $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$; $\Gamma(1) = 1$.

Correction de l'exercice 2 – Deux paramètres, deux bornes

L'intégrande est continue et positive sur $]0, +\infty[$; on coupe en 1.

— En 0 : $\frac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)} \sim \frac{1}{t^\alpha}$, convergence si et seulement si $\alpha < 1$.

— En $+\infty$: $\frac{1}{t^\alpha(1+t^\beta)} \sim \frac{1}{t^{\alpha+\beta}}$, convergence si et seulement si $\alpha + \beta > 1$.

Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < 1 < \alpha + \beta$$

Par exemple $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ convient (c'est $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$).

Réponse. Convergence si et seulement si $\alpha < 1 < \alpha + \beta$.

Correction de l'exercice 3 – Un équivalent en zéro par développement limité

Les trois intégrandes sont positives sur $]0, 1]$.

a) $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$: intégrande $\sim \frac{1}{2}t^{2-\alpha}$, convergence $\Leftrightarrow \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$.

b) $t - \sin t \sim \frac{t^3}{6}$: convergence $\Leftrightarrow \alpha < 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\mathrm{e}^t - 1 - t \sim \frac{t^2}{2}$: convergence $\Leftrightarrow \alpha < 3$.

Méthode générale : si $f(t) \sim ct^k$ ($c > 0$) en 0, alors

$$\int_0 \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha < k+1$$

Réponse. a) $\alpha < 3$; b) $\alpha < 4$; c) $\alpha < 3$.

Correction de l'exercice 4 – Différence d'exponentielles sur t

a) $\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} = t + O(t^2)$, donc l'intégrande tend vers 1 en 0.

b) En $+\infty$, $0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t} \leq \mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geq 1$: convergence. En 0, fonction prolongeable par continuité : pas de problème.

c) Non : en 0, $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \sim \frac{1}{t}$, non intégrable. On ne peut pas séparer une intégrale convergente en deux intégrales divergentes :

$$\int_0^{+\infty} (f-g) \neq \int_0^{+\infty} f - \int_0^{+\infty} g \quad \text{(membre de droite non défini)}$$

On calculera $I = \ln 2$ (intégrale de Frullani) en travaillant sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Réponse. I converge (intégrande $\to 1$ en 0, $\leq \mathrm{e}^{-t}$ à l'infini), alors que chacun des deux morceaux diverge en 0.

Correction de l'exercice 5 – Logarithmes en l'infini

a) $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t} > 0$: divergence.

b) $\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)$, de signe constant (négatif) au voisinage de $+\infty$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \sim -\frac{1}{2t^2}$$

convergence.

c) $\frac{1}{t} - \sin\frac{1}{t} \sim \frac{1}{6t^3}$: convergence. Ces calculs sont les analogues continus de ceux sur les séries $\sum\left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right)$.

Réponse. a) diverge ; b) converge (équivalent $-\frac{1}{2t^2}$) ; c) converge (équivalent $\frac{1}{6t^3}$).

Correction de l'exercice 6 – Sinus sur une puissance

a) En 0, $\frac{\sin t}{t^\alpha} \sim t^{1-\alpha} > 0$: convergence $\Leftrightarrow \alpha < 2$.

b) $\int_1^X \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t^\alpha}\right]_1^X - \alpha\int_1^X \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$. Le crochet a une limite, et $\left|\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, intégrable : convergence.

c) Si $\alpha > 1$, $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$: absolue. Si $\alpha \leq 1$, $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^\alpha}$ diverge (le terme en $\cos 2t$ converge) : pas absolue. Donc

$$I_\alpha \text{ converge} \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2, \quad \text{absolument} \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$$

Réponse. I_α converge pour $0 < \alpha < 2$, absolument pour $1 < \alpha < 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Logarithme sur un dénominateur qui s'annule

a) En 1 : $\ln t \sim t-1$, donc $\frac{\ln t}{1-t} \to -1$ (prolongeable). En 0 : $\frac{\ln t}{1-t} \sim \ln t$, intégrable. Convergence.

b) En 1, $|\ln t| \sim 1-t$ et l'intégrande est équivalente à $\frac{1}{1-t}$: divergence **quel que soit** α, quelle que soit la nature en 0.

c) En 1 : $\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \sim -\sqrt{1-t} \to 0$. En 0 : équivalent à $\ln t$, intégrable. Convergence :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Réponse. a) converge ; b) diverge pour tout α (problème en 1) ; c) converge.

Correction de l'exercice 8 – Moments d'une gaussienne

a) En $+\infty$: $t^a \mathrm{e}^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, convergence. En 0 : équivalent à t^a, convergence $\Leftrightarrow a > -1$.

b) $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$. Par parties ($u = t^2$, $v' = t\mathrm{e}^{-t^2}$) :

$$\int_0^{+\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^2\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

c) $t = \sqrt{u}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$: $\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)$; on retrouve $\frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}$.

Réponse. Converge ssi $a > -1$; $\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{a+1}{2})$; $a = 1, 3$ donnent $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – Arc tangente sur une puissance

L'intégrande est positive sur $]0, +\infty[$.

— En 0 : $\arctan t \sim t$, d'où un équivalent $t^{1-\alpha}$; convergence $\Leftrightarrow \alpha - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$.
— En $+\infty$: $\arctan t \to \frac{\pi}{2}$, équivalent $\frac{\pi}{2t^\alpha}$; convergence $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow 1 < \alpha < 2$$

Pour $\alpha = \frac{3}{2}$, par exemple, l'intégrale vaut $\pi\sqrt{2}$ (calcul par parties puis $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t^2)}$).

Réponse. Convergence si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

Correction de l'exercice 10 – Une intégrale qui se calcule par parties

a) En 0 : $1 - \mathrm{e}^{-t} \sim t$, intégrande $\sim t^{-1/2}$, intégrable. En $+\infty$: $0 \le \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t^{3/2}} \le \frac{1}{t^{3/2}}$, intégrable.

b) Avec $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, $v' = t^{-3/2}$, $v = -2t^{-1/2}$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2(1-\mathrm{e}^{-t})}{\sqrt{t}}\right]_\varepsilon^X + 2\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Le crochet tend vers 0 aux deux bornes ($\frac{1-\mathrm{e}^{-\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} \sim \sqrt{\varepsilon}$).

c) $I = 2\sqrt{\pi} \approx 3{,}545$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $I = 2\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}$.

Correction de l'exercice 11 – Un piège : une borne cachée

a) Seule la borne 0 pose problème, avec $\sin t \sim t$: convergence $\Leftrightarrow \alpha < 1$ (pour $\alpha \leq 0$, l'intégrande est continue sur le segment).

b) Il y a **deux** bornes problématiques ($\sin \pi = 0$), symétriques : même condition $\alpha < 1$.

c) Deux bornes : en 0, équivalent $t^{-1/2}$, et en 1, $(1-t)^{-1/2}$: convergence. Avec $t = \sin^2\theta$, $\mathrm{d}t = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Réponse. a) et b) : convergence ssi $\alpha < 1$; c) converge et vaut π.

Correction de l'exercice 12 – Changement de variable racine

a) $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ (bijection C^1 croissante de $]0, +\infty[$) :

$$\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\cdot 3! = 12$$

b) $\int_0^{+\infty} 2u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2$.

c) $\int_0^{+\infty} 2u^{2a+1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\Gamma(2a+2)$, convergente $\Leftrightarrow 2a+2 > 0 \Leftrightarrow a > -1$.

Réponse. a) 12 ; b) 2 ; c) converge ssi $a > -1$, valeur $2\Gamma(2a+2)$.

Correction de l'exercice 13 – Comparaison avec une intégrale de Riemann

a) Pour $t \geq 2$, $t^{-t} \leq t^{-2}$, intégrable sur $[2, +\infty[$; sur $[1, 2]$, intégrande continue.

b) $t^{1/t} = \mathrm{e}^{\ln t/t} \to 1$, donc $\frac{1}{t^{1+1/t}} \sim \frac{1}{t}$: divergence. (Un exposant qui tend vers 1 ne suffit pas.)

c) $\ln\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t^2}\right) = t^2\ln\left(1-\frac{1}{t}\right) = -t - \frac{1}{2} + o(1)$, donc

$$\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t^2} \sim \mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}$$

intégrable : convergence.

Réponse. a) converge ; b) diverge (équivalent $\frac{1}{t}$) ; c) converge (équivalent $\mathrm{e}^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}$).

Correction de l'exercice 14 – Fonction positive non intégrable mais petite

a) f est positive et ne tend pas vers 0 (elle vaut 1 en chaque $k\pi$) ; elle est cependant petite en dehors de pics de plus en plus étroits : il faut mesurer la contribution des pics.

b) Avec $u = t - k\pi \in [-1, 1]$: $t^2\sin^2 t \leq (k\pi+1)^2u^2$, donc

$$\int_{k\pi-1}^{k\pi+1} f \geq \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+(k\pi+1)^2u^2} = \frac{2\arctan(k\pi+1)}{k\pi+1} \geq \frac{\pi/2}{k\pi+1}$$

(car $\arctan(k\pi+1) \geq \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$).

c) Les intervalles $[k\pi-1, k\pi+1]$ sont disjoints et la série $\sum \frac{1}{k\pi+1}$ diverge : $\int_0^{+\infty} f = +\infty$.

Réponse. Chaque pic contribue au moins $\frac{\pi/2}{k\pi+1}$, série divergente : $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : logarithme d’une puissance sur une puissance

a) $a > 0$. En 0 : $\ln(1+t^a) \sim t^a$, intégrande $\sim t^{a-b}$, convergence $\Leftrightarrow b - a < 1$. En $+\infty$: $\ln(1+t^a) \sim a \ln t$, intégrande $\sim \dfrac{a \ln t}{t^b}$, convergence $\Leftrightarrow b > 1$. Condition :

$$1 < b < a + 1$$

b) $a < 0$. En 0 : $\ln(1+t^a) = \ln(t^a(1+t^{-a})) \sim |a||\ln t|$, intégrande $\sim \dfrac{|a||\ln t|}{t^b}$, convergence $\Leftrightarrow b < 1$. En $+\infty$: $\ln(1+t^a) \sim t^a$, intégrande $\sim t^{a-b}$, convergence $\Leftrightarrow b - a > 1$. Condition : $a + 1 < b < 1$.

c) $a = 0$: intégrande $\dfrac{\ln 2}{t^b}$, jamais intégrable sur $]0, +\infty[$.

d) Les deux régions sont des bandes obliques entre les droites $b = 1$ et $b = a + 1$, de part et d’autre de $a = 0$: la condition s’écrit $\min(1, a+1) < b < \max(1, a+1)$ avec $a \neq 0$.

Réponse. Convergence ssi b est strictement entre 1 et $a + 1$ (avec $a \neq 0$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).