Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : intégrales classiques, séries et convergence dominée

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Convergence dominée. Si $f_n \to f$ simplement sur I (fonctions continues par morceaux) et $|f_n| \le \varphi$ avec φ intégrable sur I, alors

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_I f$$

Intégration terme à terme. Si $\sum u_n$ converge simplement et $\sum \int_I |u_n| < +\infty$, alors $\int_I \sum u_n = \sum \int_I u_n$ (pour des $u_n \ge 0$, l'égalité vaut dans $[0,+\infty]$).

Références. $\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(n+1)^2}$; $\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$; $\int_0^{\pi/2} \ln\sin = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Correction de l'exercice 1 – Une intégrale de logarithme par parties

a) En 0 : $\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = -2\ln t + \ln(1+t^2)$, intégrable. En $+\infty$: équivalent à $\frac{1}{t^2}$, intégrable.

b) Le crochet $t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ tend vers 0 en 0 (équivalent $-2t\ln t$) et en $+\infty$ (équivalent $\frac{1}{t}$). Et $u' = \frac{-2t^{-3}}{1+t^{-2}} = \frac{-2}{t(t^2+1)}$, d'où

$$I = -\int_0^{+\infty} t\cdot\frac{-2}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

c) $I = \pi$.

Réponse. $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t = \pi$.

Correction de l'exercice 2 – Logarithme sur un moins t et zêta de deux

a) Série géométrique de raison $t \in]0,1[$, multipliée par $\ln t$.

b) Les termes $t^n\ln t$ sont tous négatifs : on applique le théorème d'intégration terme à terme aux fonctions positives $-t^n\ln t$, avec

$$\int_0^1 -t^n\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}, \qquad \sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)^2} < +\infty$$

c) $I = -\sum_{n\ge 0}\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6} \approx -1{,}645$.

Réponse. $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 3 – Une intégrale de Fermi-Dirac

a) $\frac{1}{\mathrm{e}^t+1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-nt}$ (série géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-t}$, de module <1).

b) $\int_0^{+\infty}|(-1)^{n-1}t\mathrm{e}^{-nt}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$, et $\sum\frac{1}{n^2} < +\infty$: le théorème d'intégration terme à terme s'applique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $I = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \left(1 - \frac{2}{2^2}\right)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12} \approx 0{,}8225$.

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t + 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$.

Correction de l'exercice 4 – Frullani avec l'arc tangente

a) En 0 : l'intégrande tend vers $b - a$. En $+\infty$:
$\arctan(bt) - \arctan(at) = \arctan\frac{1}{at} - \arctan\frac{1}{bt} \sim \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, d'où un équivalent en $\frac{1}{t^2}$.

b) Changements $u = bt$ et $u = at$ dans les deux morceaux (sur un segment), puis réarrangement des bornes.

c) $\frac{\arctan u}{u} \to 1$ en 0 : $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\arctan u}{u}\,\mathrm{d}u \to 0$ (intégrande bornée sur un intervalle de longueur $\to 0$). Sur $[aX, bX]$, $\arctan u = \frac{\pi}{2} + o(1)$:

$$\int_{aX}^{bX} \frac{\arctan u}{u}\,\mathrm{d}u \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$$

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bt - \arctan at}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 5 – Deux intégrales déduites de celle du logarithme du sinus

a) Symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$: $2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = -\pi\ln 2$.

b) $u = t$, $v' = \frac{\cos t}{\sin t}$, $v = \ln\sin t$: le crochet $t\ln\sin t$ tend vers 0 en 0 et vaut 0 en $\frac{\pi}{2}$, donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

c) $J = \int_0^{\pi} t\ln\sin t = \int_0^{\pi}(\pi - t)\ln\sin t$, donc $2J = \pi\int_0^{\pi}\ln\sin t = -\pi^2\ln 2$.

Réponse. a) $-\pi\ln 2$; b) $\frac{\pi}{2}\ln 2$; c) $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

Correction de l'exercice 6 – La fonction bêta

a) En 0 : équivalent t^{a-1}, convergence $\Leftrightarrow a > 0$. En 1 : équivalent $(1-t)^{b-1}$, convergence $\Leftrightarrow b > 0$.

b) $t \mapsto 1 - t$ échange les rôles. $B(a,1) = \int_0^1 t^{a-1} = \frac{1}{a}$. $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$.

c) $u = t^a$, $v' = (1-t)^{b-1}$, $v = -\frac{(1-t)^b}{b}$: crochet nul, $B(a+1,b) = \frac{a}{b}B(a,b+1)$. Et $B(a,b+1) = \int t^{a-1}(1-t)^{b-1}(1-t) = B(a,b) - B(a+1,b)$, d'où

$$B(a+1,b)\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}B(a,b), \qquad B(a+1,b) = \frac{a}{a+b}B(a,b)$$

Réponse. $B(a,b)$ converge ssi $a, b > 0$; $B(a,1) = \frac{1}{a}$, $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$; $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b}B(a,b)$.

Correction de l'exercice 7 – Une fonction définie par une intégrale

a) Avec G primitive de $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ sur $]0,+\infty[$, $F(x) = G(2x) - G(x)$, donc
$F'(x) = 2\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Sur $[x, 2x]$, $\mathrm{e}^{-2x} \leq \mathrm{e}^{-t} \leq \mathrm{e}^{-x}$ et $\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln 2$. Donc $F \to \ln 2$ en 0^+ et $F \to 0$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_\varepsilon^X F' = F(\varepsilon) - F(X)$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

Réponse. $F' = \frac{\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x}}{x}$, $F \to \ln 2$ en 0, $\to 0$ en $+\infty$; l'intégrale de Frullani vaut $\ln 2$.

Correction de l'exercice 8 – Dérivée intégrable et limite nulle

a) $f(x) = f(0) + \int_0^x f'$, et $\int_0^{+\infty} f'$ converge (absolument) : f a une limite ℓ.

b) Si $\ell \neq 0$, $|f| \geq \frac{|\ell|}{2}$ au voisinage de $+\infty$, non intégrable. Donc $\ell = 0$.

c) Si g' était intégrable, $g(x) = g(0) + \int_0^x g'$ aurait une limite finie en $+\infty$ (a). Or $\sin(x^2)$ prend les valeurs 1 et -1 arbitrairement loin : pas de limite. Donc $g'(x) = 2x\cos(x^2)$ n'est pas intégrable (et la convergence de $\int g$, qui est semi-convergente, n'y change rien).

Réponse. f et f' intégrables $\Rightarrow f \to 0$.

Correction de l'exercice 9 – Densités gaussiennes

a) $u = \frac{t-m}{\sigma\sqrt{2}}$: $\sigma\sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sigma\sqrt{2\pi}$.

b) La première est nulle (fonction impaire intégrable). Par parties ($u = t$, $v' = t\mathrm{e}^{-t^2/2}$, $v = -\mathrm{e}^{-t^2/2}$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

c) $\int \varphi = 1$ (a) avec $m = 0$, $\sigma = 1$), $\int t\varphi = 0$, $\int t^2\varphi = 1$.

Réponse. $\int \mathrm{e}^{-(t-m)^2/(2\sigma^2)} = \sigma\sqrt{2\pi}$; φ est une densité centrée réduite.

Correction de l'exercice 10 – La constante de Catalan

a) Développement de arctan sur $[0,1]$ divisé par t ; pour t fixé, série alternée de termes décroissants, d'où la majoration du reste.

b) On intègre la somme partielle et le reste :

$$\left| G - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2N+2}}{2N+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2N+3)^2} \to 0$$

c) $\frac{1}{(2N+3)^2} \leq 10^{-3}$ dès que $2N+3 \geq 32$, soit $N \geq 15$ (seize termes). $G \approx 0{,}9160$.

Réponse. $G = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \approx 0{,}9160$.

Correction de l'exercice 11 – Gamma, zêta et le rayonnement du corps noir

a) En 0 : $\frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \sim t^{s-2}$, intégrable car $s - 2 > -1$. En $+\infty$: $O(t^{s-1}\mathrm{e}^{-t})$, intégrable.

b) $\frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n \geq 1} t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}$, termes positifs, et $\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$ (poser $u = nt$).
Intégration terme à terme de fonctions positives :

$$I(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\zeta(s)$$

c) $s = 4$: $\Gamma(4)\zeta(4) = 6 \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} \approx 6{,}494$ (c'est l'intégrale de la loi de Stefan).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1} = \Gamma(s)\zeta(s)$; pour $s = 4$: $\frac{\pi^4}{15}$.

Correction de l'exercice 12 – Limite d'intégrales par convergence dominée

a) $\frac{1}{1+t^n} \to 1$ sur $[0,1[$, $\frac{1}{2}$ en 1, 0 sur $]1,+\infty[$; la domination indiquée est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc la limite vaut

$$\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$$

b) $\int_0^1 \frac{n\,\mathrm{d}t}{1+n^2t^2} = \arctan n \to \frac{\pi}{2}$, alors que l'intégrande tend vers 0 pour tout $t > 0$: la masse se concentre en 0, aucune domination intégrable n'est possible (le sup des intégrandes en t vaut $\frac{1}{2t}$, non intégrable en 0).

c) Même raison : $\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ pour tout n, limite simple nulle ; la meilleure domination $\sup_n \frac{n}{1+n^2t^2} = \frac{1}{2t}$ n'est pas intégrable.

Réponse. a) 1 ; b) $\int_0^1 \frac{n}{1+n^2t^2} = \arctan n \to \frac{\pi}{2}$ sans domination possible ; c) idem, $\frac{1}{2t}$ non intégrable.

Correction de l'exercice 13 – L'exponentielle comme limite sous l'intégrale

a) $\ln(1-u) \le -u$ pour $u \in [0,1[$, donc $n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \le -t$.

b) $f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n 1_{[0,n]}(t) \to \mathrm{e}^{-t}$, dominée par e^{-t} intégrable : la limite vaut $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 1$. Directement :

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$$

c) Domination par $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, intégrable : la limite vaut $\Gamma(x)$ (formule d'Euler-Gauss en germe).

Réponse. $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} \to 1$; plus généralement $\to \Gamma(x)$.

Correction de l'exercice 14 – Fonction intégrable à dérivée bornée

a) Inégalité des accroissements finis : $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$.

b) Une fonction uniformément continue et intégrable tend vers 0.

c) Soit $h = \frac{|f(x)|}{M}$. Pour $t \in [x, x+h]$, $|f(t)| \ge |f(x)| - M(t-x) \ge 0$, donc

$$\int_x^{+\infty} |f| \ge \int_x^{x+h} (|f(x)| - M(t-x))\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)^2}{2M}$$

ce qui redonne $f(x) \to 0$, avec une vitesse contrôlée par le reste de l'intégrale.

Réponse. f lipschitzienne intégrable : $f \to 0$, et même $f(x)^2 \le 2M\int_x^{+\infty} |f|$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : l'intégrale de Gauss par les intégrales de Wallis

a) $\ln(1-v) \le -v$ et $\ln(1+v) \le v$ pour $v \ge 0$ ($v < 1$ dans le premier cas), avec $v = \frac{t^2}{n}$, puis on multiplie par n et on passe à l'exponentielle.

b) $\mathrm{d}t = \sqrt{n}\cos u\,\mathrm{d}u$, $1 - \frac{t^2}{n} = \cos^2 u$: l'intégrale devient $\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u\,\mathrm{d}u$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{n}\,\mathrm{d}u}{\cos^2 u}$ et $1+\tan^2 u = \dfrac{1}{\cos^2 u}$: on obtient $\sqrt{n}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} u\,\mathrm{d}u$.

d) En intégrant a) : $\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leq G \leq \sqrt{n}\,W_{2n-2}$. Or

$$\sqrt{n}\,W_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \sqrt{n}\,W_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par encadrement, $G = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Réponse. $\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \leq \sqrt{n}\,W_{2n-2}$, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).