Plaquette 3 – Calculs d'intégrales impropres : changements de variable et intégrations par parties

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour **calculer** une intégrale impropre, on travaille sur un segment $[\varepsilon, X]$ puis on passe à la limite, ou l'on applique directement les théorèmes sur les intervalles ouverts : **changement de variable** par une bijection C^1 strictement monotone (qui conserve la nature), **intégration par parties** à condition que le crochet ait des limites finies. Les changements usuels : $t = \frac{1}{u}$ (symétrie entre 0 et $+\infty$, qui fait apparaître des intégrales nulles ou égales), $t = \tan\theta$ (fractions en $1+t^2$), $t = \mathrm{e}^{-u}$ (logarithmes sur $]0,1]$), $u = t - \frac{1}{t}$. La fonction Γ et l'intégrale de Gauss servent de références.

Exercice 1 – La relation fonctionnelle de Gamma

Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Par une intégration par parties, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) En déduire $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} t^5\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 – Gamma aux demi-entiers

On admet $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (poser $t = u^2$).

b) En déduire $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

c) Montrer que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$.

Exercice 3 – Une fraction en t puissance quatre

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

a) Montrer que I et J convergent et que $I = J$ (poser $t = \frac{1}{u}$).

b) Montrer que $I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}\,\mathrm{d}t$.

c) Avec $u = t - \frac{1}{t}$, en déduire $I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 4 – Une intégrale nulle par symétrie

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Avec $t = \frac{1}{u}$, montrer qu'elle est nulle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $a>0$ (poser $t=au$).

Exercice 5 – Puissances de 1 + t carré

Pour $n \geq 1$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

a) Avec $t=\tan\theta$, montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$.

b) Calculer I_1, I_2, I_3.

c) Retrouver I_2 par une intégration par parties sur I_1 ($I_1 = 2I_1 - 2I_2$).

Exercice 6 – Puissances du logarithme

a) Avec $t=\mathrm{e}^{-u}$, montrer que $\int_0^1 (\ln t)^n\,\mathrm{d}t = (-1)^n n!$.

b) Calculer $\int_0^1 t^a (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$ pour $a>-1$.

c) En déduire $\int_0^1 \sqrt{t}(\ln t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 – Cosinus hyperbolique inverse

a) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}$ (poser $u=\mathrm{e}^t$).

b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2 t}$.

Exercice 8 – Intégrales de Frullani

Soient $0<a<b$ et $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Pour $0<\varepsilon<X$, montrer que $\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

b) Montrer que le premier terme tend vers $\ln\frac{b}{a}$ et le second vers 0.

c) Conclure, et donner $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 – Une intégrale par parties délicate

Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I converge.

b) Avec $u=\ln(1-t^2)$ et $v=\frac{t-1}{t}$ (choix qui annule le crochet aux deux bornes), montrer que $I = -2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$.

c) En déduire I.

Exercice 10 – Un produit polynôme exponentielle sinus

a) Calculer $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t$ par intégration par parties.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$.

c) Généraliser : $\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-zt}\,\mathrm{d}t$ pour $\mathrm{Re} z > 0$.

Exercice 11 – Fraction rationnelle sur la droite

a) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$ (forme canonique).

b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t^2+2t+5)^2}$ en écrivant $t = (t+1)-1$.

c) L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$ converge-t-elle ?

Exercice 12 – Arc tangente sur un plus t carré

a) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\int_0^{1} \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 – Une intégrale gaussienne déplacée

On admet $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

a) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$ pour $a > 0$.

b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+2t}\,\mathrm{d}t$ (forme canonique).

c) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (intégration par parties).

Exercice 14 – Réduction par le changement t vers 1 sur t

Soit $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, avec $f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t)$.

a) Montrer que l'intégrale est nulle.

b) Montrer de même que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est nulle (poser $t = \frac{1}{u}$).

c) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$ ne dépend pas de α et vaut $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 15 – Synthèse : racines de la tangente et de la cotangente

On reprend $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

a) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$ converge et, avec $u = \sqrt{\tan t}$, qu'elle vaut $2\int_0^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^4}$.

b) En déduire sa valeur.

c) En déduire $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan t}}$ et $\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\tan t} + \frac{1}{\sqrt{\tan t}}\right)\mathrm{d}t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).