Plaquette 1 – Convergence, critères de comparaison et intégrales de référence

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On repère les **points problématiques** (borne infinie, singularité), on compare à une **intégrale de Riemann** par équivalents, on distingue **absolue convergence** et **semi-convergence**, et on calcule par primitive, IPP ou changement de variable.

Exercice 1 – Intégrale de Riemann en l'infini

Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ et calculer sa valeur si elle converge.

Exercice 2 – Singularité en 0

Étudier $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Exercice 3 – Comparaison par équivalents

Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 – Deux points problématiques

Étudier $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(1+t)}$.

Exercice 5 – Croissances comparées

Étudier $\int_1^{+\infty} t^{10}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 – Intégrale avec logarithme

Montrer que $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer.

Exercice 7 – Semi-convergence

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais pas absolument.

Exercice 8 – Changement de variable

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Intégrale de Gauss

Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et encadrer sa valeur.

Exercice 10 – Intégrale et série

Comparer $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 11 – Intégrale à paramètre (nature)

Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^\alpha}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

Exercice 12 – Intégrales de Bertrand

a) Pour $\beta \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\beta}$ (calculer une primitive).

b) En déduire la nature de $\int_0^{1/2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t|\ln t|^\beta}$ (poser $u = \frac{1}{t}$).

c) Nature de $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln t}$ selon α.

Exercice 13 – Intégrale du logarithme du sinus

Soit $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I converge.

b) Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$, puis que $2I = \int_0^{\pi/2} \ln \dfrac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

Exercice 14 – Exponentielle amortie et sinus

Soit $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence absolue.

b) Calculer I comme partie imaginaire de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer plus généralement $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t$ pour $a > 0$.

Exercice 15 – Synthèse : calcul par IPP

Calculer $I = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).