Plaquette 4 – Intégrabilité, semi-convergence et liens avec les séries

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Une fonction est **intégrable** si $\int |f|$ converge ; une intégrale peut converger sans que f soit intégrable (**semi-convergence**), typiquement pour des oscillations amorties ($\frac{\sin t}{t}$, $\sin t^2$). Pour étudier ces cas, on fait une **intégration par parties** qui fait gagner un facteur décroissant, ou l'on découpe en **périodes** et l'on se ramène à une **série** (souvent alternée). Inversement, la comparaison série-intégrale ramène l'étude d'une série à celle d'une intégrale. Attention aux idées fausses : une fonction intégrable ne tend pas forcément vers 0, et un équivalent ne conserve la nature que pour des fonctions de signe constant.

Exercice 1 – Intégrable sans tendre vers zéro

Pour $n \geq 2$, soit T_n la fonction « triangle » nulle hors de $\left[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}\right]$, affine par morceaux, valant 1 en n, et $f = \sum_{n \geq 2} T_n$.

a) Montrer que f est continue, positive, et que $f(n) = 1$ pour tout $n \geq 2$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} f$ en fonction de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

c) Conclure : une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ tend-elle vers 0 ?

Exercice 2 – Quand l'intégrabilité force la limite nulle

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable.

a) Si f est décroissante, montrer que $f \geq 0$ et que $f(x) \to 0$.

b) Toujours si f est décroissante, montrer que $\frac{x}{2} f(x) \leq \int_{x/2}^{x} f$, puis que $x f(x) \to 0$.

c) Si f est uniformément continue (et intégrable), montrer que $f(x) \to 0$.

Exercice 3 – L'intégrale de Fresnel

Soit $I = \int_1^{+\infty} \sin(t^2)\, \mathrm{d}t$.

a) Avec $u = t^2$, montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\, \mathrm{d}u$, et en déduire la convergence.

b) L'intégrale converge-t-elle absolument ?

c) L'intégrande a-t-elle une limite en $+\infty$? Commenter.

Exercice 4 – Un équivalent trompeur

Soit $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t}$ pour $t \geq 2$.

a) Montrer que $f(t) \sim \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ en un sens à préciser, et que $\int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que $\int_2^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 5 – Une série très lentement divergente

a) Calculer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t\ln t\ln(\ln t)}$ sur $]e,+\infty[$.

b) En déduire la nature de $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ par comparaison série-intégrale.

c) Nature de $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

Exercice 6 – Sinus cardinal par découpage en périodes

Pour $k\geq 0$, soit $u_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (avec $\frac{\sin t}{t}=1$ en 0).

a) Montrer que $u_k=(-1)^k a_k$ avec $a_k=\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u$, et que (a_k) décroît vers 0.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que sa valeur I vérifie $a_0-a_1<I<a_0$.

c) Montrer que $a_k\geq\frac{2}{(k+1)\pi}$, et en déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 7 – Lemme d'Abel pour les intégrales

Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^1, décroissante de limite nulle, et g continue dont une primitive G est bornée par M.

a) Montrer que $\int_a^X fg=f(X)G(X)-f(a)G(a)-\int_a^X f'G$.

b) En déduire la convergence de $\int_a^{+\infty} fg$.

c) Application : $\int_2^{+\infty}\frac{\sin t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{0{,}01}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 – Une moyenne pondérée d'une fonction intégrable

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue et intégrable.

a) Pour $0<A<X$, montrer que $\left|\frac{1}{X}\int_0^X tf(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{A}{X}\int_0^A|f|+\int_A^{+\infty}|f|$.

b) En déduire $\frac{1}{X}\int_0^X tf(t)\,\mathrm{d}t\to 0$.

c) Vérifier le résultat sur $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$ par un calcul explicite.

Exercice 9 – Le carré du sinus cardinal

On admet $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

b) Par une intégration par parties, montrer qu'elle vaut $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2t}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire sa valeur, ainsi que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(at)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $a\in\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Intégrabilité d'une fonction et de son carré

a) Donner une fonction intégrable sur $]0,1]$ dont le carré n'est pas intégrable.
b) Donner une fonction de carré intégrable sur $[1,+\infty[$ qui n'est pas intégrable.
c) Montrer que si f est intégrable et bornée sur I, alors f^2 est intégrable.

Exercice 11 – Cauchy-Schwarz pour une moyenne harmonique

Soit f continue sur $[1,+\infty[$ de carré intégrable.

a) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\left(\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_1^{+\infty} f^2$.
b) Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sqrt{t}}$?
c) Application : $f(t) = \frac{1}{t^{0,6}}$.

Exercice 12 – Intégrales et séries alternées

Soit $a > 0$.

a) Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{ak+1} + R_N$ avec $|R_N| \leq \frac{1}{a(N+1)+1}$.
b) En déduire $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{ak+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^a}$.
c) Expliciter pour $a = 1$ et $a = 2$.

Exercice 13 – Équivalent de la queue de la gaussienne

Soit $R(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Par parties, montrer que $R(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$.
b) En déduire $0 \leq \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - R(x) \leq \frac{R(x)}{2x^2}$, puis $R(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.
c) Estimer $R(3)$.

Exercice 14 – Comparaison série-intégrale avec contrôle du reste

Soit f positive, continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, intégrable.

a) Montrer que $\int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k>n} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f$.
b) Application : encadrer $\sum_{k>n} \frac{1}{k^2+1}$.
c) En déduire un équivalent de ce reste.

Exercice 15 – Synthèse : l'intégrale de Dirichlet

On veut montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin(t/2)}$ pour $t \in]0,\pi]$, et en déduire $\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) On admet que $\varphi(t) = \frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi]$. Par parties, montrer que $\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \to 0$.

c) En déduire $\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \to \frac{\pi}{2}$ et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).