Plaquette 2 – Nature d'une intégrale impropre : comparaison, équivalents et paramètres

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On repère d'abord **toutes les bornes problématiques** (infini, point où l'intégrande n'est pas définie ou pas bornée) et l'on **coupe** l'intervalle pour n'en avoir qu'une par morceau. Pour une fonction **positive** au voisinage de la borne, on cherche un **équivalent** (développement limité, croissances comparées) et l'on compare à une intégrale de **Riemann** $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou de **Bertrand** ; la convergence globale exige celle de chaque morceau. Pour une fonction de signe variable, on étudie la convergence **absolue**, et à défaut on fait une intégration par parties. Avec des paramètres, on obtient une **condition par borne**, puis on intersecte.

Exercice 1 – L'intégrale d'Euler de seconde espèce

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Étudier la convergence en $+\infty$.

b) Étudier la convergence en 0.

c) Conclure, et calculer $\Gamma(1)$.

Exercice 2 – Deux paramètres, deux bornes

Pour $\alpha, \beta > 0$, déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)}$.

Exercice 3 – Un équivalent en zéro par développement limité

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de :

a) $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$;

b) $\int_0^1 \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$;

c) $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 – Différence d'exponentielles sur t

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que l'intégrande se prolonge par continuité en 0.

b) Montrer que I converge.

c) Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent-elles ? Que retenir ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Logarithmes en l'infini

Déterminer la nature de :

a) $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$;

b) $\int_1^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$;

c) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}-\sin\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 6 – Sinus sur une puissance

Pour $\alpha > 0$, on étudie $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

a) Étudier la convergence en 0.

b) Montrer par une intégration par parties que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

c) Pour quels α la convergence est-elle absolue ? Conclure.

Exercice 7 – Logarithme sur un dénominateur qui s'annule

a) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ converge (étudier les deux bornes).

b) Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln t|}$ selon α.

c) Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 – Moments d'une gaussienne

a) Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Avec $u = t^2$, relier $\int_0^{+\infty} t^a\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ à Γ.

Exercice 9 – Arc tangente sur une puissance

Déterminer, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 – Une intégrale qui se calcule par parties

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I converge.

b) Par une intégration par parties sur $[\varepsilon, X]$, montrer que $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

c) Sachant $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, donner I.

Exercice 11 – Un piège : une borne cachée

a) Déterminer la nature de $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{(\sin t)^\alpha}$ selon α.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Déterminer la nature de $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(\sin t)^{\alpha}}$ selon α.

c) Déterminer la nature de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$ et la calculer (poser $t = \sin^2\theta$).

Exercice 12 – Changement de variable racine

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer (poser $t = u^2$).

b) Même question pour $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

c) Nature de $\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ selon a.

Exercice 13 – Comparaison avec une intégrale de Riemann

a) Montrer que $\int_1^{+\infty} t^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+1/t}}$ diverge.

c) Déterminer la nature de $\int_1^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 14 – Fonction positive non intégrable mais petite

Soit $f(t) = \frac{1}{1 + t^2 \sin^2 t}$ sur $[0, +\infty[$.

a) Expliquer pourquoi une comparaison globale avec une fonction de Riemann ne permet pas de conclure.

b) Pour $k \geq 1$, minorer $\int_{k\pi - 1}^{k\pi + 1} f(t)\,\mathrm{d}t$ (utiliser $|\sin t| \leq |t - k\pi|$ et $t \leq k\pi + 1$).

c) En déduire que $\int_0^{+\infty} f$ diverge.

Exercice 15 – Synthèse : logarithme d'une puissance sur une puissance

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on étudie $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + t^a)}{t^b}\,\mathrm{d}t$.

a) Cas $a > 0$: déterminer la condition de convergence (étudier 0 et $+\infty$).

b) Cas $a < 0$: même question (en 0, $\ln(1 + t^a) \sim |a||\ln t|$).

c) Cas $a = 0$.

d) Représenter l'ensemble des (a, b) de convergence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).