Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : intégrales classiques, séries et convergence dominée

Intégrales généralisées — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les grandes intégrales classiques se calculent en combinant les outils du chapitre : **développement en série** de l'intégrande puis intégration terme à terme (fonctions positives, ou $\sum\int|u_n|<+\infty$), **symétries** ($t\mapsto\frac{1}{t}$, $t\mapsto\pi-t$), **intégrations par parties** qui ramènent à une intégrale connue ($\int\ln\sin$), méthode de Frullani, et **convergence dominée** pour les limites d'intégrales dépendant de n : on exhibe une limite simple et une fonction intégrable qui domine toutes les intégrandes. La constante $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ et l'intégrale de Gauss reviennent sans cesse.

Exercice 1 – Une intégrale de logarithme par parties

Soit $I=\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I converge.

b) Par une intégration par parties ($u=\ln(1+t^{-2})$, $v'=1$), montrer que $I=\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

c) En déduire I.

Exercice 2 – Logarithme sur un moins t et zêta de deux

Soit $I=\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que pour $t\in\,]0,1[$, $\frac{\ln t}{1-t}=\sum_{n\geq 0}t^n\ln t$.

b) Justifier l'intégration terme à terme (signe des termes).

c) En déduire $I=-\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3 – Une intégrale de Fermi-Dirac

Soit $I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $\frac{t}{\mathrm{e}^t+1}=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}t\mathrm{e}^{-nt}$ pour $t>0$.

b) Justifier l'intégration terme à terme.

c) En déduire $I=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 4 – Frullani avec l'arc tangente

Soient $0<a<b$ et $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(bt)-\arctan(at)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que I converge.

b) Montrer que $\int_\varepsilon^X\frac{\arctan(bt)-\arctan(at)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{aX}^{bX}\frac{\arctan u}{u}\,\mathrm{d}u-\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\arctan u}{u}\,\mathrm{d}u$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $I = \frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$.

Exercice 5 – Deux intégrales déduites de celle du logarithme du sinus

On admet $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

a) Calculer $\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

b) Par parties, montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\tan t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

c) Avec $t \mapsto \pi - t$, montrer que $\int_0^{\pi} t\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

Exercice 6 – La fonction bêta

Pour $a, b \in \mathbb{R}$, soit $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $B(a,b)$ converge si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

b) Montrer que $B(a,b) = B(b,a)$, calculer $B(a,1)$ et $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

c) Par parties, montrer que $B(a+1,b) = \frac{a}{b}B(a,b+1)$, puis que $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b}B(a,b)$ (écrire $t^a = t^{a-1} - t^{a-1}(1-t)$).

Exercice 7 – Une fonction définie par une intégrale

Soit $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

a) Montrer que F est dérivable et calculer $F'(x)$.

b) Montrer que $\mathrm{e}^{-2x}\ln 2 \le F(x) \le \mathrm{e}^{-x}\ln 2$, et en déduire les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.

c) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide de F.

Exercice 8 – Dérivée intégrable et limite nulle

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que f et f' soient intégrables.

a) Montrer que f a une limite finie en $+\infty$.

b) En déduire que $f(x) \to 0$.

c) Application : en déduire que la dérivée de $g(x) = \sin(x^2)$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, bien que $\int_0^{+\infty} g$ converge (raisonner sur le principe de la preuve).

Exercice 9 – Densités gaussiennes

On admet $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

a) Pour $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est une densité de moyenne 0 et de variance 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – La constante de Catalan

Soit $G = \int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $\frac{\arctan t}{t} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2k+1}$ sur $]0,1]$, avec un reste majoré par $\frac{t^{2N+2}}{2N+3}$.

b) En déduire $G = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

c) Combien de termes pour 10^{-3} près ? Donner une valeur approchée.

Exercice 11 – Gamma, zêta et le rayonnement du corps noir

Soit $s > 1$ et $I(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I(s)$ converge.

b) Montrer que $I(s) = \Gamma(s)\zeta(s)$ (développer en série à termes positifs).

c) Sachant $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 – Limite d'intégrales par convergence dominée

a) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$ (dominer par 1 sur $[0,2]$ et par $\frac{1}{t^2}$ sur $[2,+\infty[$ pour $n \geq 2$).

b) Calculer $\int_0^1 \frac{n\,\mathrm{d}t}{1+n^2t^2}$ et sa limite, et la comparer à l'intégrale de la limite simple.

c) Pourquoi la convergence dominée ne s'applique-t-elle pas à $\int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$?

Exercice 13 – L'exponentielle comme limite sous l'intégrale

a) Montrer que pour $0 \leq t \leq n$, $0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t}$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ par convergence dominée, et vérifier par le calcul direct.

c) Déterminer de même $\lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Exercice 14 – Fonction intégrable à dérivée bornée

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, intégrable, avec $|f'| \leq M$.

a) Montrer que f est uniformément continue.

b) En déduire que $f(x) \to 0$ (exercice de la plaquette 4).

c) Montrer plus précisément que $f(x)^2 \leq 2M \int_x^{+\infty} |f|$ pour tout x, en étudiant f sur $\left[x, x + \frac{|f(x)|}{M}\right]$.

Exercice 15 – Synthèse : l'intégrale de Gauss par les intégrales de Wallis

Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\,\mathrm{d}u$, avec $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (admis), et $G = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-t^2}$ pour $0 \leq t \leq \sqrt{n}$, et $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ pour $t \geq 0$.

b) Avec $t = \sqrt{n}\sin u$, montrer que $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n+1}$.

c) Avec $t = \sqrt{n}\tan u$, montrer que $\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n} W_{2n-2}$.

d) En déduire $G = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).