Plaquette 1 – Convergence en probabilité, loi des grands nombres et méthode de Monte-Carlo

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Convergence en probabilité. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Loi faible des grands nombres. Soient $X_1, X_2, \ldots$ **indépendantes**, de **même loi**, d'espérance μ et de variance σ^2 finies. Alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

Démonstration (à connaître). $\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \mu$ et $\mathrm{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$; **Bienaymé-Tchebychev** donne

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Cas de Bernoulli. Si $X_i \sim B(p)$, alors $\overline{X}_n = F_n$ est la **fréquence** observée, $\sigma^2 = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

C'est la justification théorique de l'**estimation statistique** d'une proportion.

Méthode de Monte-Carlo. Pour estimer $I = \int_0^1 f$, on tire $U_1, \ldots, U_n$ uniformes indépendantes sur $[0\,;1]$ et l'on calcule $\frac{1}{n}\sum f(U_i)$.

- Cet estimateur est **sans biais** ($\mathbb{E}[f(U)] = I$) et converge en probabilité vers I.
- **Précision** : l'erreur type est en $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ — **indépendante de la dimension**, ce qui rend la méthode compétitive en grande dimension.

Loi forte (admise) : la convergence a en fait lieu **presque sûrement**.

Correction de l'exercice 1 – Convergence en probabilité

- **Convergence en probabilité** : pour $\varepsilon > 0$ fixé et n assez grand ($n > \varepsilon$),

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

- Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- **Espérance** : $\mathbb{E}(X_n) = 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n \times \frac{1}{n} = 1$ pour tout n.
- $\mathbb{E}(X_n) = \mathcal{V} \to 0$.
- **Conclusion** : la convergence en probabilité **n'entraîne pas** la convergence des espérances.
- **Explication** : une masse de probabilité **de plus en plus petite** est placée **de plus en plus loin** — le produit reste constant. C'est exactement la situation que le théorème de convergence dominée exclut.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais $\mathbb{E}(X_n) = 1$ pour tout n.

Correction de l'exercice 2 – Loi faible des grands nombres

— **Paramètres** : $\mu = 3{,}5$ et $\sigma^2 = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}9167$.

— **Variance de la moyenne** : $\mathrm{V}\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{35}{12n}$.

— **Tchebychev** avec $\varepsilon = 0{,}1$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - 3{,}5\right| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{35}{12 \times 10\,000 \times 0{,}01} = \frac{35}{1\,200} \approx 0{,}0292$$

— **Conclusion** : moins de 3 % de chance de s'écarter de plus de 0,1 de la moyenne théorique.

— **Comparaison avec le TCL** : $\sigma\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1{,}708}{100} \approx 0{,}0171$, et 0,1 représente 5,9 écarts types — la vraie probabilité est de l'ordre de 4×10^{-9}.

— **Leçon** : Tchebychev donne une majoration **certaine** mais très prudente.

Réponse. $\leq \dfrac{35}{1200} \approx 0{,}029$.

Correction de l'exercice 3 – Taille d'échantillon

— **Modèle** : F_n est la fréquence de piles, $\mathbb{E}(F_n) = 0{,}5$, $\mathrm{V}(F_n) = \dfrac{0{,}25}{n}$.

— **Tchebychev** :

$$\mathbb{P}(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}02) \leq \frac{0{,}25}{n \times 0{,}0004} = \frac{625}{n}$$

— On veut $\dfrac{625}{n} \leq 0{,}01$, soit $n \geq 62\,500$.

— **Conclusion** : 62 500 lancers garantissent la précision demandée.

— **Avec le TCL** : $n \geq \left(\dfrac{2{,}576 \times 0{,}5}{0{,}02}\right)^2 \approx 4\,147$ — quinze fois moins !

— **Interprétation** : Tchebychev est **universel** (aucune hypothèse au-delà de la variance) mais coûteux ; le TCL exploite la forme asymptotiquement normale et suffit en pratique.

Réponse. $n \geq 62\,500$ (Tchebychev) ; environ 4 150 via le TCL.

Correction de l'exercice 4 – Estimation d'une proportion

— **Majoration de la variance** : $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$, donc $\mathrm{V}(F_n) \leq \dfrac{1}{4n} = \dfrac{1}{4\,000}$.

— **Tchebychev** : $\mathbb{P}(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

— On veut cette majoration $\leq 0{,}05$:

$$\frac{1}{4\,000\,\varepsilon^2} \leq 0{,}05 \iff \varepsilon^2 \geq \frac{1}{200} \iff \varepsilon \geq 0{,}0707$$

— **Conclusion** : l'intervalle garanti est 52 % ± 7,1 points, soit [44,9 % ; 59,1 %] — beaucoup trop large pour être informatif.

— **Intervalle usuel (TCL)** : $\pm\dfrac{1{,}96}{2\sqrt{1000}} \approx \pm 3{,}1$ points, soit [48,9 % ; 55,1 %].

— **Conséquence pratique** : même avec l'intervalle du TCL, on ne peut **pas** conclure que la majorité est acquise — 50 % reste dans l'intervalle.

Réponse. ±7,1 points (Tchebychev) ; ±3,1 points via le TCL.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Méthode de Monte-Carlo

— **Principe** : on tire (U_i, V_i) uniformes indépendants dans le carré et l'on compte ceux qui tombent dans le quart de disque $U^2 + V^2 \leq 1$.

— **Probabilité** : $p = \dfrac{\text{aire du quart de disque}}{\text{aire du carré}} = \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

— **Estimateur** : $\hat{\pi} = 4F_n$, où F_n est la fréquence observée. La LGN assure $F_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \dfrac{\pi}{4}$, donc $\hat{\pi} \xrightarrow{\mathbb{P}} \pi$.

— **Précision** : $\mathrm{V}(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n} = \dfrac{0{,}7854 \times 0{,}2146}{10^6} \approx 1{,}686 \times 10^{-7}$, donc $\sigma(F_n) \approx 4{,}1 \times 10^{-4}$.

— $\sigma(\hat{\pi}) = 4\sigma(F_n) \approx 1{,}64 \times 10^{-3}$.

— **Conclusion** : avec un million de tirages, on obtient environ **deux à trois décimales** de π.

— **Limite de la méthode** : la précision progresse en $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ — gagner une décimale coûte **cent fois** plus de tirages. Monte-Carlo n'est donc pas compétitif en dimension 1, mais le devient en **grande dimension**, où les méthodes déterministes explosent.

Réponse. $\hat{\pi} = 4F_n$; écart type $\approx 1{,}6 \times 10^{-3}$ pour $n = 10^6$.

Correction de l'exercice 6 – Monte-Carlo pour une intégrale

— **Estimateur** : $\hat{I}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-U_i^2}$ avec U_i uniformes sur $[0\,;1]$ indépendantes.

— **Sans biais** : $\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-U^2}\right] = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = I$, donc $\mathbb{E}\left(\hat{I}_n\right) = I$ ✓

— **Variance** : $\mathrm{V}\left(\hat{I}_n\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ avec

$$\sigma^2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x - I^2$$

— **Valeurs numériques** : $I \approx 0{,}74682$ et $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x \approx 0{,}59814$, donc $\sigma^2 \approx 0{,}59814 - 0{,}55774 = 0{,}04040$ et $\sigma \approx 0{,}2010$.

— **Précision** : pour $n = 10^4$, l'écart type de l'estimateur est $\dfrac{0{,}201}{100} \approx 0{,}0020$.

— **Comparaison** : la méthode des rectangles avec 10^4 points donnerait une erreur en $\dfrac{1}{n} = 10^{-4}$, bien meilleure — en dimension 1, les méthodes déterministes gagnent.

Réponse. $\hat{I}_n = \dfrac{1}{n}\sum \mathrm{e}^{-U_i^2}$, sans biais, d'écart type $\approx \dfrac{0{,}201}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 7 – Loi faible sans variance finie

— **La démonstration par Tchebychev** exige $\sigma^2 < +\infty$: elle ne s'applique **pas** directement.

— **Mais le résultat reste vrai** : le théorème de **Khintchine** affirme que la loi faible vaut dès que l'**espérance** existe (la démonstration passe par les fonctions caractéristiques ou par troncature).

— **Si même l'espérance n'existe pas**, tout s'effondre : pour la loi de **Cauchy**, la moyenne $\overline{X}_n$ suit **exactement la même loi** que X_1, quel que soit n — elle ne converge vers rien.

— **Illustration** : simuler 10^6 variables de Cauchy et en prendre la moyenne donne un résultat aussi erratique qu'un seul tirage.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **À retenir pour les exercices** : la version au programme suppose la variance finie ; c'est l'hypothèse à **vérifier et citer**.
— **Contre-exemple discret** : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{c}{k^2}$ n'a pas d'espérance, et la moyenne empirique **diverge**.

Réponse. La preuve du programme exige $\sigma^2 < \infty$; sans espérance (Cauchy), la LGN est fausse.

Correction de l'exercice 8 – Convergence en probabilité et opérations

Soit $\varepsilon > 0$.

— **Inégalité triangulaire** : si $|X_n + Y_n - (a+b)| \geq \varepsilon$, alors nécessairement $|X_n - a| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ **ou** $|Y_n - b| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
— **Sous-additivité** :

$$\mathbb{P}(|X_n + Y_n - (a+b)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_n - a| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - b| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

— Les deux termes tendent vers 0 par hypothèse, donc la somme aussi.
— **Conclusion** : $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a + b$.
— **Remarque** : **aucune hypothèse d'indépendance** n'est nécessaire — c'est un argument purement analytique.
— **Extensions (théorème de Slutsky)** : le produit et le quotient (si $b \neq 0$) se traitent de même, et une fonction **continue** préserve la convergence en probabilité.

Réponse. Sous-additivité après découpage à $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Correction de l'exercice 9 – Fréquence empirique

— **Estimation ponctuelle** : $\hat{p} = \dfrac{15}{500} = 0{,}03$.
— **Tchebychev** : $\mathbb{P}(|F_n - p| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
— On veut $\dfrac{1}{4 \times 500 \times \varepsilon^2} \leq 0{,}10$, donc $\varepsilon^2 \geq \dfrac{1}{200}$ et $\varepsilon \geq 0{,}0707$.
— **Intervalle** : $[0\,;0{,}1007]$ (la borne inférieure est tronquée à 0).
— **Amélioration en utilisant** $\hat{p}$: $\hat{p}(1-\hat{p}) = 0{,}0291$, donc $\varepsilon \geq \sqrt{\dfrac{0{,}0291}{50}} \approx 0{,}0241$ — l'intervalle devient $[0{,}006\,;0{,}054]$, bien plus informatif.
— **Leçon** : la majoration $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ est très pessimiste quand p est **petit** ; utiliser l'estimation de la variance améliore nettement l'intervalle.

Réponse. $\hat{p} = 3$ % ; intervalle $\pm 7{,}1$ points (ou $\pm 2{,}4$ points avec $\hat{p}$).

Correction de l'exercice 10 – Loi des grands nombres et simulation

Code.

```
import random

def simule(n):
    total = 0
    for _ in range(n):
        total += max(random.randint(1, 6), random.randint(1, 6))
    return total / n
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
print(simule(1000000))
```

Valeur théorique. La loi du maximum est $\mathbb{P}(M = k) = \dfrac{2k-1}{36}$, donc

$$\mathbb{E}(M) = \frac{1\times 1 + 2\times 3 + 3\times 5 + 4\times 7 + 5\times 9 + 6\times 11}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}472$$

— **Détail du numérateur** : $1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 = 161$ ✓

— **Convergence** : d'après la LGN, la moyenne simulée converge vers 4,472 ; avec 10^6 tirages, l'écart type de l'estimateur est $\dfrac{\sigma}{1000}$ avec $\sigma \approx 1{,}40$, soit environ 0,0014.

— **Contrôle de cohérence** : $\mathbb{E}(\min) = \dfrac{91}{36} \approx 2{,}528$, et $\mathbb{E}(\min) + \mathbb{E}(\max) = 7 = \mathbb{E}(D_1) + \mathbb{E}(D_2)$ ✓

Réponse. $\mathbb{E}(M) = \dfrac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Correction de l'exercice 11 – Comparaison avec le théorème central limite

— **Tchebychev** : $\mathrm{V}(F_n) = \dfrac{0{,}25}{100} = 0{,}0025$, donc

$$\mathbb{P}(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}1) \leq \frac{0{,}0025}{0{,}01} = 0{,}25$$

— **Valeur exacte** : $|F_{100} - 0{,}5| \geq 0{,}1$ signifie $S \leq 40$ ou $S \geq 60$ avec $S \sim B(100\,;0{,}5)$.

— Le calcul donne $\mathbb{P} \approx 0{,}0569$.

— **Approximation normale** : $\sigma(S) = 5$, l'écart de 10 vaut 2 écarts types, d'où $\mathbb{P} \approx 2 \times 0{,}0228 = 0{,}0455$ (proche, à la correction de continuité près).

— **Bilan** : Tchebychev majore par 0,25 une probabilité réelle de 0,057 — un facteur 4,4.

— **Quand utiliser quoi** : Tchebychev pour une **garantie** rigoureuse et une démonstration de convergence ; le TCL pour une **estimation** numérique réaliste.

Réponse. Tchebychev $\leq 0{,}25$; valeur exacte $\approx 0{,}057$.

Correction de l'exercice 12 – Fréquences de succès hétérogènes

a) $V_n = \sum_i B_i$ avec $B_i \sim B(p_i)$ **indépendantes** : $\mathbb{E}\left(\dfrac{V_n}{n}\right) = \overline{p}_n$ et

$$\mathrm{V}\left(\frac{V_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{n^2} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{4n}$$

— **Bienaymé-Tchebychev** conclut.

b) Pour n assez grand, $|\overline{p}_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $\left\langle \left|\dfrac{V_n}{n} - \ell\right| \geq \varepsilon \right\rangle \subset \left\langle \left|\dfrac{V_n}{n} - \overline{p}_n\right| \geq \dfrac{\varepsilon}{2} \right\rangle$, de probabilité au plus $\dfrac{1}{n\varepsilon^2} \to 0$.

c) $\overline{p}_n \to 0{,}3$: la fréquence de ventes tend vers 0,3.

— **Leçon** : la loi faible n'exige pas des variables de même loi ; il suffit ici que les variances soient **uniformément bornées**.

Réponse. $\mathrm{V}\left(\dfrac{V_n}{n}\right) \leq \dfrac{1}{4n}$; $\dfrac{V_n}{n} \to \ell$ en probabilité ; 0,3.

Correction de l'exercice 13 – Le maximum d'un échantillon

a) $M_n < N$ si et seulement si aucun tirage ne vaut N ; par **indépendance** :

$$\mathbb{P}(M_n < N) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $0 < \varepsilon \leq 1$, $\{|M_n - N| \geq \varepsilon\} = \{M_n < N\}$ (les valeurs sont entières), et $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \to 0$. Pour $\varepsilon > 1$, l'événement est encore inclus dans $\{M_n < N\}$. Donc $M_n \to N$ en probabilité.

c) On veut $0{,}99^n \leq 0{,}01$, soit $n \geq \frac{\ln 100}{-\ln 0{,}99} \approx 458{,}2$: $n = 459$ tirages.

— **Interprétation** : c'est l'estimation de la taille N d'une population numérotée par le plus grand numéro observé (problème des chars d'assaut allemands) ; l'estimateur est convergent, mais toujours biaisé par défaut.

Réponse. $\mathbb{P}(M_n < N) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \to 0$; 459 tirages.

Correction de l'exercice 14 – Moment d'ordre deux empirique

a) Les D_i^2 sont indépendantes, de même loi, bornées : la **loi faible** s'applique et

$$Q_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\left(D^2\right) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

b) $\mathbb{E}\left(D^4\right) = \frac{1+16+81+256+625+1\,296}{6} = \frac{2\,275}{6}$, donc

— $\mathrm{V}\left(D^2\right) = \frac{2\,275}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2 = \frac{13\,650 - 8\,281}{36} = \frac{5\,369}{36} \approx 149{,}1$.

— **Tchebychev** : $\mathbb{P}\left(\left|Q_n - \frac{91}{6}\right| \geq 1\right) \leq \frac{149{,}1}{n}$.

c) $\overline{D}_n \to \frac{7}{2}$ en probabilité, donc $\overline{D}_n^2 \to \frac{49}{4}$ (fonction continue), et la différence de deux suites convergentes en probabilité converge vers la différence des limites :

— $Q_n - \overline{D}_n^2 \to \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$, la variance du dé : c'est la **variance empirique**, estimateur convergent de la variance.

Réponse. $Q_n \to \frac{91}{6}$; borne $\frac{149{,}1}{n}$; $Q_n - \overline{D}_n^2 \to \frac{35}{12}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : contrôle de production

a) - **Variance de la moyenne** : $\mathrm{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{4}{n}$.

— **Tchebychev** avec $\varepsilon = 0{,}5$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - 100\right| \geq 0{,}5\right) \leq \frac{4}{n \times 0{,}25} = \frac{16}{n}$$

— On veut $\frac{16}{n} \leq 0{,}05$, donc $n \geq 320$.

— **Conclusion** : un échantillon de **320 pièces** suffit.

b) **Robustesse.**

— Le calcul n'utilise **que** la moyenne et l'écart type : il est valable **quelle que soit la loi** des longueurs (normale ou non).

— **Avec l'hypothèse de normalité** (TCL) : $n \geq \left(\frac{1{,}96 \times 2}{0{,}5}\right)^2 \approx 62$ — cinq fois moins.

— **Compromis industriel** : si la loi est bien connue et proche d'une normale, on utilise $n = 62$; en l'absence d'information, $n = 320$ garantit le résultat sans hypothèse.

— **Contrôle** : avec $n = 320$, $\sigma\left(\overline{X}_n\right) = \frac{2}{\sqrt{320}} \approx 0{,}112$, et 0,5 mm représente 4,5 écarts types — la vraie probabilité de dépassement est infime, ce qui confirme le caractère prudent de Tchebychev.

Réponse. a) $n \geq 320$ · b) valable sans hypothèse de loi ; $n \approx 62$ suffirait sous normalité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).