Plaquette 2 – Convergence en probabilité : propriétés et contre-exemples

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Découpage. $\{|U+V| \geq 2\varepsilon\} \subset \{|U| \geq \varepsilon\} \cup \{|V| \geq \varepsilon\}$, d'où

$$\mathbb{P}(|U+V| \geq 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|U| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|V| \geq \varepsilon)$$

Outils de majoration.

— Markov : $\mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}\left[(X_n - a)^2\right]}{\varepsilon^2}$ (convergence en moyenne quadratique ⇒ en probabilité).

— Tchebychev pour une moyenne : $\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{\mathrm{V}(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$.

Stabilité. Si $X_n \to a$ et $Y_n \to b$ (constantes) : $X_n + Y_n \to a+b$, $X_n Y_n \to ab$, et $f(X_n) \to f(a)$ si f est continue en a.

Ce qui ne passe pas. Convergence en probabilité ⇏ convergence des espérances ni des variances ; même loi ⇏ proximité.

Correction de l'exercice 1 – Variables de Bernoulli

a) X_n ne prend que les valeurs 0 et 1, donc pour $0 < \varepsilon \leq 1$, $\{|X_n| \geq \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ et

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = p_n$$

— Pour $\varepsilon > 1$, la probabilité est nulle.

b) **Définition** : $X_n \to 0$ en probabilité si et seulement si $p_n \to 0$.

c) De même, $\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) = 1 - p_n$ pour $0 < \varepsilon \leq 1$: $X_n \to 1$ si et seulement si $p_n \to 1$.

— **Remarque** : si $p_n \to p \in]0,1[$, X_n ne converge en probabilité vers aucune constante (on aurait $\mathbb{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) \geq \min(p_n, 1-p_n)$ pour ε petit).

Réponse. $X_n \to 0 \Leftrightarrow p_n \to 0$; $X_n \to 1 \Leftrightarrow p_n \to 1$.

Correction de l'exercice 2 – Une loi de Poisson qui s'évanouit

a) Pour $0 < \varepsilon \leq 1$, X_n étant à valeurs entières :

$$\mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-1/n} \longrightarrow 0$$

b) $a_n X_n$ est nul dès que X_n l'est, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\{a_n X_n \geq \varepsilon\} \subset \{X_n \geq 1\}$, de probabilité $1 - \mathrm{e}^{-1/n} \to 0$.

c) $\mathbb{E}(nX_n) = n \times \frac{1}{n} = 1$ pour tout n, alors que $nX_n \to 0$ en probabilité.

— **Lecture** : la convergence en probabilité ne regarde que la probabilité d'être loin, pas **à quelle distance** on est quand on l'est. Ici nX_n vaut presque toujours 0, et rarement une grande valeur qui porte toute l'espérance.

Réponse. $\mathbb{P}(X_n \geq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-1/n} \to 0$; $a_n X_n \to 0$; $\mathbb{E}(nX_n) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Unicité de la limite

a) **Découpage** : $X - Y = (X - X_n) + (X_n - Y)$, donc

$$\mathbb{P}(|X - Y| \geq 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - Y| \geq \varepsilon)$$

— Le membre de gauche ne dépend pas de n, et le membre de droite tend vers 0 : il est nul.

b) $\{X \neq Y\} = \bigcup_{k \geq 1} \left\{|X - Y| \geq \frac{1}{k}\right\}$, réunion croissante d'événements de probabilité nulle (par a) avec $\varepsilon = \frac{1}{2k}$). Par **continuité croissante** (ou sous-additivité dénombrable), $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$.

— **Conclusion** : la limite en probabilité est unique, à un événement de probabilité nulle près.

Réponse. $\mathbb{P}(|X - Y| \geq 2\varepsilon) = 0$ pour tout ε, donc $X = Y$ p.s.

Correction de l'exercice 4 – Produit de deux suites convergentes

a) Si $|U_n V_n| \geq \varepsilon$, l'un des deux facteurs est au moins $\sqrt{\varepsilon}$ en valeur absolue :

$$\mathbb{P}(|U_n V_n| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|U_n| \geq \sqrt{\varepsilon}) + \mathbb{P}(|V_n| \geq \sqrt{\varepsilon}) \longrightarrow 0$$

b) Si $c = 0$, c'est clair ; sinon $\mathbb{P}(|cU_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(|U_n| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right) \to 0$.

c) Les trois termes tendent vers 0 en probabilité (par a) et b)), et une somme de trois suites tendant vers 0 en probabilité y tend aussi (découpage en $\frac{\varepsilon}{3}$) :

— $\mathbb{P}(|X_n Y_n - ab| \geq \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}\left(|T_k| \geq \frac{\varepsilon}{3}\right) \to 0$.

— **Application** : si $\overline{X}_n \to \mu$ et $\overline{Y}_n \to \nu$, alors $\overline{X}_n \overline{Y}_n \to \mu\nu$.

Réponse. $X_n Y_n \to ab$ en probabilité.

Correction de l'exercice 5 – Image par une fonction continue

a) **Continuité** en a : pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Par contraposée,

$$\{|f(X_n) - f(a)| \geq \varepsilon\} \subset \{|X_n - a| \geq \delta\}$$

— et la probabilité de droite tend vers 0.

b) **Loi faible** : $\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{V}(X_i) = \frac{q}{p^2}$ finie, donc $\overline{X}_n \to \frac{1}{p}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en $\frac{1}{p} > 0$: $\frac{1}{\overline{X}_n} \to p$.

c) $\hat{p} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

— **Remarque** : l'estimateur $\frac{1}{\overline{X}_n}$ est **convergent** mais biaisé ($\mathbb{E}\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) \neq p$ en général) ; la convergence en probabilité se transporte par les fonctions continues, l'espérance non.

Réponse. $f(X_n) \to f(a)$; $\frac{1}{\overline{X}_n} \to p$; $\hat{p} = 0{,}25$.

Correction de l'exercice 6 – Convergence en moyenne quadratique

a) **König-Huygens** décalé : $\mathbb{E}\left[(X_n - a)^2\right] = \mathrm{V}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n) - a)^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

b) **Markov** appliquée à $(X_n - a)^2$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\Big((X_n - a)^2 \geq \varepsilon^2\Big) \leq \frac{1/n + 1/n^2}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0$$

c) $\mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{n} \to 0$ pour $0 < \varepsilon \leq n$: $Y_n \to 0$ en probabilité. Mais

— $\mathbb{E}\left(Y_n^2\right) = n^2 \times \frac{1}{n} = n \to +\infty$: pas de convergence en moyenne quadratique.

— **Bilan** : moyenne quadratique ⇒ probabilité, sans réciproque.

Réponse. $\mathbb{E}[(X_n - a)^2] = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$; borne $\frac{1/n + 1/n^2}{\varepsilon^2}$; $\mathbb{E}(Y_n^2) = n$.

Correction de l'exercice 7 – Variables bornées : les espérances convergent

a) Si $|a| > M$, avec $\varepsilon = |a| - M > 0$ on aurait $|X_n - a| \geq \varepsilon$ toujours, donc $\mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) = \mathcal{V} \to 0$: absurde.

b) On découpe selon l'événement $A_n = \{|X_n - a| \geq \varepsilon\}$:

$$|\mathbb{E}(X_n) - a| \leq \mathbb{E}|X_n - a| = \mathbb{E}(|X_n - a|1_{\overline{A_n}}) + \mathbb{E}(|X_n - a|1_{A_n}) \leq \varepsilon + 2M\,\mathbb{P}(A_n)$$

— car $|X_n - a| \leq |X_n| + |a| \leq 2M$.

c) Pour ε fixé, $\limsup |\mathbb{E}(X_n) - a| \leq \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$: donc $\mathbb{E}(X_n) \to a$.

— **Sans bornitude**, la variable $n1_{A_n}$ avec $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ tend vers 0 en probabilité mais a une espérance égale à 1 : la valeur rare et grande échappe au contrôle.

Réponse. $|\mathbb{E}(X_n) - a| \leq \varepsilon + 2M\mathbb{P}(A_n)$, donc $\mathbb{E}(X_n) \to a$.

Correction de l'exercice 8 – Une perturbation qui s'efface

a) $X_n - X = \frac{X}{n}$, d'où l'égalité.

b) Les événements $B_n = \{|X| \geq n\varepsilon\}$ sont **décroissants** et d'intersection vide (X est à valeurs réelles finies). Par **continuité décroissante** :

$$\mathbb{P}(B_n) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_n B_n\right) = 0$$

c) $\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{1}{k}$, donc $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq 1) = \mathbb{P}(X \geq n) = \frac{1}{n}$.

— **Lecture** : aucune hypothèse de moment n'est nécessaire ; seule compte la finitude de X. La vitesse de convergence, elle, dépend de la queue de la loi (ici en $\frac{1}{n}$).

Réponse. $\mathbb{P}(|X| \geq n\varepsilon) \to 0$ par continuité décroissante ; $\frac{1}{n}$ dans l'exemple.

Correction de l'exercice 9 – Sans indépendance, la moyenne peut ne pas converger

a) Oui : chaque X_i suit $B\left(\frac{1}{2}\right)$, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{4}$.

b) $\overline{X}_n = \frac{nX}{n} = X$, qui vaut 0 ou 1 : $\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ toujours, donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right) = 1$$

— La moyenne ne converge pas vers $\frac{1}{2}$.

c) La preuve utilise $\mathrm{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}$, qui repose sur des **covariances nulles**. Ici $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{4}$ pour tous i, j et

— $\mathrm{V}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n^2} \times n^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \not\to 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Leçon** : la loi des grands nombres est un théorème sur la **compensation** d'aléas indépendants ; répéter la même observation n'apporte aucune information nouvelle.

Réponse. $\overline{X}_n = X$; probabilité 1 ; $\mathrm{V}(\overline{X}_n) = \frac{1}{4}$ faute d'indépendance.

Correction de l'exercice 10 – Convergence vers une constante et fonction de répartition

a) Si $x > a$, posons $\varepsilon = x - a$: $\{X_n > x\} \subset \{|X_n - a| \geq \varepsilon\}$, donc

$$1 - F_n(x) = \mathbb{P}(X_n > x) \leq \mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$$

— Si $x < a$, avec $\varepsilon = a - x$: $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) \leq \mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon) \to 0$.

b) **Loi faible** : $Y_n \to 0{,}3$. Donc $\mathbb{P}(Y_n \leq 0{,}25) \to 0$ et $\mathbb{P}(Y_n \leq 0{,}35) \to 1$.

c) Rien en général : la fonction de répartition limite (celle de la constante a) est discontinue en a. Pour $X_n = a + \frac{1}{n}$, $F_n(a) = 0$; pour $X_n = a - \frac{1}{n}$, $F_n(a) = 1$; pour une fréquence binomiale, $F_n(a)$ tend vers $\frac{1}{2}$ (théorème central limite).

Réponse. $F_n(x) \to 1_{x>a}$ pour $x \neq a$; limites 0 et 1 ; rien en $x = a$.

Correction de l'exercice 11 – Deux estimateurs asymptotiquement équivalents

a) **Découpage** : $X_n - a = (X_n - Y_n) + (Y_n - a)$, donc

$$\mathbb{P}(|X_n - a| \geq 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - Y_n| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \varepsilon) \to 0$$

b) $L_n - F_n = \frac{n(S_n+1) - (n+2)S_n}{n(n+2)} = \frac{n - 2S_n}{n(n+2)}$, et $0 \leq S_n \leq n$ donne

— $|L_n - F_n| \leq \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n+2}$: déterministe, donc $L_n - F_n \to 0$ en probabilité.

— Avec $F_n \to p$ (loi faible) et a), $L_n \to p$.

c) $F_{10} = 0$ et $L_{10} = \frac{1}{12} \approx 0{,}083$.

— **Intérêt** : F_n affirme qu'un événement jamais observé est impossible ; L_n lui laisse une probabilité positive, tout en ayant la même limite.

Réponse. $|L_n - F_n| \leq \frac{1}{n+2}$; $L_n \to p$; 0 contre $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 12 – Le minimum de temps d'attente

a) **Indépendance** : $\mathbb{P}(m_n > 1) = \prod_i \mathbb{P}(T_i > 1) = q^n$.

b) $m_n \geq 1$ et m_n est entier, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\{|m_n - 1| \geq \varepsilon\} \subset \{m_n > 1\}$, et

$$\mathbb{P}(|m_n - 1| \geq \varepsilon) \leq q^n \longrightarrow 0$$

c) On veut $0{,}9^n \leq 0{,}05$, soit $n \geq \frac{\ln 20}{-\ln 0{,}9} \approx 28{,}4$: 29 guichets.

— **Remarque** : la convergence est **exponentiellement** rapide, bien plus que celle d'une moyenne (en $\frac{1}{n}$ par Tchebychev).

Réponse. $\mathbb{P}(m_n > 1) = q^n \to 0$; 29 guichets.

Correction de l'exercice 13 – Les variances ne suivent pas

a) Pour $0 < \varepsilon \leq n$, $\{|X_n - a| \geq \varepsilon\} = A_n$, de probabilité $\frac{1}{n^2} \to 0$.

b) **Linéarité** : $\mathbb{E}(X_n) = a + n \times \frac{1}{n^2} = a + \frac{1}{n} \to a$. Et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{V}(X_n) = n^2\,\mathrm{V}(1_{A_n}) = n^2 \times \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$$

— La variance ne tend pas vers 0, alors que la limite est une constante.

c) $X_n = a + n^2 1_{A_n}$: même convergence en probabilité, mais $\mathrm{V}(X_n) = n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \to +\infty$.

— **Leçon** : variance qui tend vers 0 ⇒ convergence (Tchebychev), mais pas l'inverse.

Réponse. $X_n \to a$; $\mathbb{E}(X_n) \to a$ mais $\mathrm{V}(X_n) \to 1$; avec n^2, $\mathrm{V} \to +\infty$.

Correction de l'exercice 14 – Même loi ne veut pas dire proches

a) $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$: $X_n \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) $|X_n - X| = |1 - 2X| = 1$ toujours, donc

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \frac{1}{2}\right) = 1 \not\to 0$$

— X_n ne converge pas vers X en probabilité, bien que toutes ces variables aient **la même loi**.

c) Les fonctions de répartition de X_n sont toutes égales à celle de Y ; à la limite, X et Y ont même fonction de répartition aux points de continuité, donc partout (continuité à droite), donc même loi.

— **Leçon** : la convergence en probabilité compare les **valeurs** des variables sur le même univers ; la loi seule ne suffit pas à la décider.

Réponse. $X_n \sim X$ mais $|X_n - X| = 1$: pas de convergence ; une limite en probabilité a la loi commune.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : combien de cycles a une grande permutation ?

a) Évident car $\sum \frac{1}{k^2} > 0$.

b) **Bienaymé-Tchebychev** :

$$\mathbb{P}(|C_n - H_n| \geq \varepsilon H_n) \leq \frac{\mathrm{V}(C_n)}{\varepsilon^2 H_n^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 H_n}$$

c) $H_n \to +\infty$, donc b) donne $\frac{C_n}{H_n} \to 1$ en probabilité. Or $H_n \sim \ln n$, donc $\frac{H_n}{\ln n} \to 1$ (suite déterministe), et le **produit** de deux suites convergentes en probabilité converge :

— $\frac{C_n}{\ln n} = \frac{C_n}{H_n} \times \frac{H_n}{\ln n} \to 1$.

d) $\varepsilon = 0{,}5$: $\frac{1}{0{,}25 \times 14{,}39} \approx 0{,}278$.

— **Lecture** : la concentration est réelle mais **lente** (en $\frac{1}{\ln n}$) ; une permutation d'un million d'éléments a « environ 14 » cycles, avec une marge relative qui reste large.

Réponse. Borne $\frac{1}{\varepsilon^2 H_n}$; $\frac{C_n}{\ln n} \to 1$; $\approx 0{,}278$ pour $n = 10^6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).