Plaquette 4 – Au-delà du cadre classique : dépendance, hétérogénéité, comptages

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critère général. Si $\mathrm{V}(S_n) = o(b_n^2)$, alors par Tchebychev

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

— $b_n = n$: loi faible pour une moyenne ; $b_n = \mathbb{E}(S_n) \to +\infty$: $\frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} \to 1$ (concentration d'un comptage).

Variance d'une somme.

$$\mathrm{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

— Covariances **nulles** (non-corrélation, indépendance deux à deux) : $\mathrm{V}(S_n) = \sum \mathrm{V}(X_i)$.
— Covariances **négatives** (tirages sans remise, boîtes vides) : $\mathrm{V}(S_n) \leq \sum \mathrm{V}(X_i)$.
— **Cesàro** : si $|\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| \leq r(|i-j|)$ avec $r(k) \to 0$, alors $\mathrm{V}(S_n) = o(n^2)$.

Sous-additivité. $\mathbb{P}\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \mathbb{P}(A_k)$, pour contrôler plusieurs estimations à la fois.

Correction de l'exercice 1 – Variances lentement croissantes

a) **Indépendance** : $\mathrm{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) \leq C \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} \leq Cn \cdot n^{\alpha}$, d'où

$$\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq \frac{Cn^{\alpha+1}}{n^2} = Cn^{\alpha-1}$$

b) **Tchebychev** : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Cn^{\alpha-1}}{\varepsilon^2} \to 0$ si $\alpha < 1$.

c) $\mathrm{V}(X_i) = i^{1/2}$: $C = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Borne : $\frac{n^{-1/2}}{0{,}01} = \frac{100}{\sqrt{n}} = 1$ pour $n = 10^4$ — inutile. Plus finement, $\sum_{i \leq n} \sqrt{i} \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$, ce qui donne environ $\frac{0{,}667}{\sqrt{n}} \times 100 \approx 0{,}67$.

— **Lecture** : la convergence a lieu, mais elle est lente quand les variances croissent ; il faut n de l'ordre de 10^6 pour une borne de 0,067.

Réponse. $\mathrm{V}(\frac{S_n}{n}) \leq Cn^{\alpha-1} \to 0$ si $\alpha < 1$; borne $\approx 0{,}67$ pour $n = 10^4$.

Correction de l'exercice 2 – Un million de bits à partir de vingt

a) Soit $j \in A$. Conditionnellement aux autres bits, X_A vaut c ou $1-c$ selon B_j, avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun : donc $\mathbb{P}(X_A = 1) = \frac{1}{2}$.

b) Quitte à échanger, soit $j \in A \setminus A'$. $X_{A'}$ ne dépend pas de B_j ; conditionnellement à tous les bits sauf B_j, $X_{A'}$ est fixé et X_A est équiprobable. Donc $\mathbb{P}(X_A = a, X_{A'} = a') = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{A'} = a') = \frac{1}{4}$: **indépendance deux à deux**.

c) Les covariances sont nulles, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{V}(F) = \frac{1}{N^2}\sum_{A}\mathrm{V}(X_A) = \frac{1}{4N}$$

— **Tchebychev** conclut. Pour $k = 20$, $N = 2^{20} - 1 \approx 10^6$: borne $\dfrac{1}{4 \times 10^6 \times 10^{-4}} \approx 0{,}0024$.

— **Lecture** : les X_A ne sont pas mutuellement indépendantes ($X_{\{1\}} + X_{\{2\}} + X_{\{1,2\}}$ est toujours pair), mais l'indépendance **deux à deux** suffit à la loi faible ; vingt bits aléatoires « en valent » un million pour Tchebychev.

Réponse. Indépendance deux à deux, $\mathrm{V}(F) = \frac{1}{4N}$; borne $\approx 0{,}0024$ pour $k = 20$.

Correction de l'exercice 3 – Covariances qui s'effacent

a) On regroupe les couples (i,j) selon $k = |i-j|$: il y en a au plus $2n$ pour chaque k (et n pour $k = 0$). Donc

$$\mathrm{V}(S_n) = \sum_{i,j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \le \sum_{k=0}^{n-1} 2n\, r(k)$$

b) **Cesàro** : $r(k) \to 0$ entraîne $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(k) \to 0$, donc $\frac{\mathrm{V}(S_n)}{n^2} \le \frac{2}{n}\sum_{k<n} r(k) \to 0$, et **Tchebychev** conclut.

c) $\sum_{k\ge 0}\rho^k = \frac{1}{1-\rho}$, donc $\mathrm{V}(S_n) \le \frac{2n}{1-\rho}$: la variance reste **linéaire** en n, comme dans le cas indépendant, à un facteur $\frac{2}{1-\rho}$ près.

— **Lecture** : une dépendance dont la mémoire s'efface (même lentement) n'empêche pas la loi des grands nombres.

Réponse. $\mathrm{V}(S_n) \le 2n\sum_{k<n} r(k) = o(n^2)$; si $r(k) = \rho^k$, $\mathrm{V}(S_n) \le \frac{2n}{1-\rho}$.

Correction de l'exercice 4 – Une suite de bits avec mémoire

a) Par récurrence, X_{i+1} est une copie de X_i ou un bit neuf, de loi $B\left(\frac{1}{2}\right)$ dans les deux cas. Entre i et $i+k$, s'il n'y a eu **aucun** renouvellement (probabilité a^k), $X_{i+k} = X_i$; sinon X_{i+k} est une copie d'un bit neuf, indépendant de X_i. Donc

$$\mathbb{E}(X_i X_{i+k}) = a^k\,\mathbb{E}\left(X_i^2\right) + (1-a^k)\,\mathbb{E}(X_i)^2 = \frac{a^k}{2} + \frac{1-a^k}{4}$$

— et $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+k}) = \frac{a^k}{2} + \frac{1-a^k}{4} - \frac{1}{4} = \frac{a^k}{4}$.

b) $\mathrm{V}(S_n) \le \frac{n}{4}\left(1 + 2\sum_{k\ge 1} a^k\right) = \frac{n}{4}\cdot\frac{1+a}{1-a}$, donc $\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to 0$ et la fréquence tend vers $\frac{1}{2}$.

c) La variance est multipliée par au plus $\frac{1+a}{1-a} = \frac{1{,}9}{0{,}1} = 19$: il faut environ 19 fois plus d'observations pour la même garantie.

— **Lecture** : des données corrélées contiennent moins d'information ; n observations en valent environ $\frac{n}{19}$ indépendantes (« taille d'échantillon effective »).

Réponse. $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+k}) = \frac{a^k}{4}$; $\mathrm{V}(S_n) \le \frac{n}{4}\cdot\frac{1+a}{1-a}$; facteur 19 pour $a = 0{,}9$.

Correction de l'exercice 5 – Une pièce choisie au hasard

a) **Probabilités totales** selon la valeur de Π, et Tchebychev pour chaque pièce :

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \Pi| \ge \varepsilon\right) = \sum_{\pi}\mathbb{P}(\Pi = \pi)\,\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \pi| \ge \varepsilon \mid \Pi = \pi\right) \le \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

— Donc $\overline{X}_n - \Pi \to 0$: la moyenne converge vers la **variable** Π.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Si $\overline{X}_n \to c$, alors $\Pi = (\Pi - \overline{X}_n) + \overline{X}_n \to c$, donc $\Pi = c$ presque sûrement (unicité de la limite), ce qui est faux puisque Π prend deux valeurs.

c) $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}\left(\Pi^2\right) = \frac{0{,}09 + 0{,}49}{2} = 0{,}29$ et $\mathbb{E}(X_i) = 0{,}5$: $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0{,}04 = \mathrm{V}(\Pi)$.

— Les X_i ont même loi $B(0{,}5)$ mais ne sont pas indépendantes : $\mathrm{V}(\overline{X}_n) \to 0{,}04 \neq 0$.

Réponse. $\overline{X}_n - \Pi \to 0$; pas de limite constante ; $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0{,}04$.

Correction de l’exercice 6 – Moyennes pondérées

a) $\mathbb{E}(W_n) = \mu$ et, par **indépendance**,

$$\mathrm{V}(W_n) = \sigma^2 \frac{\sum_{i \leq n} a_i^2}{\left(\sum_{i \leq n} a_i\right)^2} \to 0$$

— puis **Tchebychev**.

b) $\frac{\sum i^2}{(\sum i)^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n^2(n+1)^2/4} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} \to 0$: la moyenne pondérée converge.

c) $\sum_{i \leq n} 4^i = \frac{4(4^n - 1)}{3}$ et $\left(\sum_{i \leq n} 2^i\right)^2 = 4(2^n - 1)^2$: le rapport tend vers $\frac{1}{3}$, donc $\mathrm{V}(W_n) \to \frac{\sigma^2}{3} \neq 0$.

— Le dernier terme pèse environ la moitié du total : W_n reste dominé par quelques observations récentes et ne se stabilise pas. C’est le comportement d’un **lissage exponentiel**, qui suit les changements au lieu de converger.

Réponse. Condition $\frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i)^2} \to 0$; vraie pour $a_i = i$; pour $a_i = 2^i$, rapport $\to \frac{1}{3}$, pas de convergence.

Correction de l’exercice 7 – Concentration d’un événement rare

a) $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{np_n}\right) = 1$ et

$$\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{np_n}\right) = \frac{np_n(1-p_n)}{n^2 p_n^2} = \frac{1-p_n}{np_n} \leq \frac{1}{np_n} \to 0$$

— **Tchebychev** conclut.

b) $np = 1\,000$: $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S}{1\,000} - 1\right| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{1 - 10^{-4}}{1\,000 \times 0{,}01} \approx 0{,}1$.

c) Si $np_n = \lambda$, $\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{\lambda}\right) \to \frac{1}{\lambda} \neq 0$: pas de concentration. S_n reste un petit entier aléatoire, approximativement de loi $P(\lambda)$.

— **Lecture** : ce qui compte pour la loi des grands nombres d’un comptage, c’est le **nombre moyen d’événements** np_n, pas le nombre d’essais n.

Réponse. $\mathrm{V}(\frac{S_n}{np_n}) \leq \frac{1}{np_n}$; borne $\approx 0{,}1$; pas de concentration si np_n reste borné.

Correction de l’exercice 8 – Proportion de boîtes vides

a) **Indicatrices** : $Y_n = \sum_{b=1}^{n} 1_{V_b}$, avec $\mathbb{P}(V_b) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = a_n$. Donc $\mathbb{E}(Y_n) = n a_n$ et $\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = a_n \to \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$.

b) Pour $b \neq b'$: $\mathbb{P}(V_b \cap V_{b'}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$ car $1 - \frac{2}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$. Covariances ≤ 0,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

donc

$$\mathrm{V}(Y_n) \le \sum_b \mathrm{V}(1_{V_b}) = n a_n(1-a_n) \le \frac{n}{4}$$

c) **Tchebychev** : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Y_n}{n} - a_n\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{4n\varepsilon^2} \to 0$, et $a_n \to \mathrm{e}^{-1}$ (déterministe) : $\frac{Y_n}{n} \to \mathrm{e}^{-1}$.

— $n = 10^5$, $\varepsilon = 0{,}01$: borne $\frac{1}{4 \times 10^5 \times 10^{-4}} = 0{,}025$. Environ 36,8 % des boîtes restent vides.

Réponse. $\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} \to \mathrm{e}^{-1}$; $\mathrm{V}(Y_n) \le \frac{n}{4}$; borne 0,025.

Correction de l’exercice 9 – Le nombre d’inversions se concentre

a) $(n-1)(2n+5) = 2n^2 + 3n - 5 \le 4n^2$ pour $n \ge 1$ (car $2n^2 - 3n + 5 > 0$), donc

$$\mathrm{V}(I_n) \le \frac{4n^3}{72} = \frac{n^3}{18}$$

b) **Tchebychev** : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{I_n}{n^2} - \frac{n-1}{4n}\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{n^3/18}{n^4\varepsilon^2} = \frac{1}{18n\varepsilon^2} \to 0$, et $\frac{n-1}{4n} \to \frac{1}{4}$.

c) $n = 10^4$, $\varepsilon = 0{,}01$: borne $\frac{1}{18 \times 10^4 \times 10^{-4}} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056$.

— Avec probabilité au moins 0,94, le tri effectue entre $(0{,}25 - 0{,}01)n^2$ et $(0{,}25 + 0{,}01)n^2$ échanges, soit environ $2{,}5 \times 10^7 \pm 10^6$.

— **Lecture** : le coût d’un algorithme sur une entrée aléatoire est souvent concentré : la moyenne est une prévision fiable.

Réponse. $\mathrm{V}(I_n) \le \frac{n^3}{18}$; $\frac{I_n}{n^2} \to \frac{1}{4}$; borne $\approx 0{,}056$ pour $n = 10^4$.

Correction de l’exercice 10 – Paires de dés identiques

a) Paires disjointes : elles portent sur des dés différents, indépendance immédiate. Paires $\{i,j\}$ et $\{i,k\}$:

$$\mathbb{P}(D_i = D_j = D_k) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

— Les deux indicatrices (de Bernoulli) sont indépendantes.

b) $\mathbb{E}(X) = \frac{N}{6}$ et, covariances nulles : $\mathrm{V}(X) = N \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5N}{36}$.

c) **Tchebychev** : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{N} - \frac{1}{6}\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{5}{36N\varepsilon^2} \to 0$ car $N \to +\infty$.

— **Pas mutuellement indépendantes** : si $D_1 = D_2$ et $D_2 = D_3$, alors forcément $D_1 = D_3$. Mais seule l’indépendance **deux à deux** intervient dans la variance.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \frac{N}{6}$, $\mathrm{V}(X) = \frac{5N}{36}$; $\frac{X}{N} \to \frac{1}{6}$; indépendance deux à deux seulement.

Correction de l’exercice 11 – Vitesse d’une marche aléatoire

a) $S_n = \sum_i Y_i$ avec $\mathbb{E}(Y_i) = p - q$ et $\mathrm{V}(Y_i) = 4pq$: **loi faible**,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - (p-q)\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{4pq}{n\varepsilon^2}$$

b) Pour $p = q$, la limite est 0. Mais $\mathbb{E}\left(\frac{S_n^2}{n}\right) = 1$ pour tout n : les fluctuations de S_n sont d’ordre $\sqrt{n}$, et $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ garde une dispersion fixe ; elle ne peut donc tendre vers 0 en

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

probabilité (par le résultat admis, $\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq 1\right) \geq \frac{1}{4}$).

c) $p - q = 0{,}02$ et $4pq = 4 \times 0{,}51 \times 0{,}49 = 0{,}9996$:

— borne $\dfrac{0{,}9996}{10^6 \times 0{,}000\,025} \approx 0{,}040$.

— **Lecture** : la normalisation n « écrase » les fluctuations en $\sqrt{n}$; la loi faible décrit le mouvement d'ensemble (vitesse $p - q$), pas la position exacte.

Réponse. Borne $\frac{4pq}{n\varepsilon^2}$; fluctuations d'ordre $\sqrt{n}$; $\approx 0{,}040$.

Correction de l'exercice 12 – Toutes les fréquences à la fois

a) $nF_n(k) \sim B\left(n, \frac{1}{6}\right)$: $\mathrm{V}(F_n(k)) = \frac{5}{36n}$ et **Tchebychev** donne $\frac{5}{36n\varepsilon^2}$.

b) $\{M_n \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{6} \left\{|F_n(k) - \frac{1}{6}| \geq \varepsilon\right\}$, et par **sous-additivité**

$$\mathbb{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq 6 \times \frac{5}{36n\varepsilon^2} = \frac{5}{6n\varepsilon^2} \to 0$$

c) $\dfrac{5}{6n \times 10^{-4}} \leq 0{,}05$ donne $n \geq \dfrac{5}{6 \times 10^{-4} \times 0{,}05} \approx 166\,667$ lancers.

— **Lecture** : c'est la base d'un test d'équité d'un dé : si les six fréquences sont toutes proches de $\frac{1}{6}$ après 2×10^5 lancers, on a de bonnes raisons de croire le dé équilibré (pour un écart de cet ordre).

Réponse. $\mathbb{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq \frac{5}{6n\varepsilon^2}$; $n \geq 166\,667$.

Correction de l'exercice 13 – Sans contrôle des variances, la loi faible échoue

a) **Inégalité triangulaire** et somme géométrique :

$$|X_1 + \cdots + X_{n-2}| \leq \sum_{i=1}^{n-2} 2^i = 2^{n-1} - 2$$

b) Si X_{n-1} et X_n ont le même signe, $|X_{n-1} + X_n| = 2^{n-1} + 2^n$, donc

— $|S_n| \geq 2^{n-1} + 2^n - (2^{n-1} - 2) = 2^n + 2$.

c) Cet événement a probabilité $\frac{1}{2}$, d'où $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{2^n}{n}\right) \geq \frac{1}{2}$. Comme $\frac{2^n}{n} \to +\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \geq \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang : $\frac{S_n}{n}$ ne tend pas vers $0 = \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

— **Pourquoi** : $\mathrm{V}(X_i) = 4^i$ croît si vite que le dernier terme domine toute la somme ; les variables sont indépendantes et centrées, mais rien ne se compense.

Réponse. $|S_n| \geq 2^n + 2$ avec probabilité $\geq \frac{1}{2}$; $\frac{S_n}{n} \not\to 0$.

Correction de l'exercice 14 – Loi faible sans variance : la troncature

a) **Sous-additivité** : $\mathbb{P}(\exists i \leq n,\, X_i > n) \leq \sum_{i \leq n} \mathbb{P}(X_i > n) = n\,\mathbb{P}(X > n) \leq \frac{c}{2n} \to 0$.

b) $\mathrm{V}(Y_1) \leq \mathbb{E}\left(Y_1^2\right) = \sum_{k \leq n} k^2 \frac{c}{k^3} = c \sum_{k \leq n} \frac{1}{k} \leq c(1 + \ln n)$. Les Y_i ($i \leq n$) sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i \leq n} (Y_i - \mathbb{E}Y_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{c(1 + \ln n)}{n\varepsilon^2} \to 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\mathbb{E}(Y_1) = \sum_{k \le n} \frac{c}{k^2} \to \mu$. Sur l'événement « aucune troncature », $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum Y_i$. Donc, pour n assez grand ($|\mathbb{E}Y_1 - \mu| < \frac{\varepsilon}{2}$),

— $\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \mu| \ge \varepsilon\right) \le \frac{c}{2n} + \frac{4c(1+\ln n)}{n\varepsilon^2} \to 0$.

— **Leçon** : la variance finie est une commodité de preuve ; la loi faible n'exige en fait qu'une espérance finie (théorème de Khintchine), et la troncature est l'outil qui le montre.

Réponse. Troncature : erreur $\le \frac{c}{2n}$, variance $\le c(1+\ln n)$; $\overline{X}_n \to \mu$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le collectionneur se concentre

a) $\frac{n(n-k)}{k^2} \le \frac{n^2}{k^2}$, et $\sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\mathrm{V}(T_n) \le n^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le \frac{\pi^2}{6} n^2$$

b) **Tchebychev** : $\mathbb{P}(|T_n - nH_n| \ge \varepsilon n H_n) \le \frac{\pi^2 n^2/6}{\varepsilon^2 n^2 H_n^2} = \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2 H_n^2}$.

c) $H_n \to +\infty$, donc $\frac{T_n}{nH_n} \to 1$ en probabilité ; et $\frac{H_n}{\ln n} \to 1$, d'où par **produit** $\frac{T_n}{n\ln n} \to 1$.

— Remarque : l'écart type est d'ordre n, la moyenne d'ordre $n\ln n$; le rapport tend vers 0, mais seulement comme $\frac{1}{\ln n}$.

d) $H_{100} \approx 5{,}187$; avec $\varepsilon = 0{,}5$: $\frac{1{,}645}{0{,}25 \times 26{,}91} \approx 0{,}245$.

— Borne de a) sur l'écart type : $\frac{\pi}{\sqrt{6}} \times 100 \approx 128{,}3$, très proche de la valeur exacte 125,8 : la majoration $n - k \le n$ ne perd presque rien, car ce sont les petits k (les dernières vignettes) qui portent la variance.

Réponse. $\mathrm{V}(T_n) \le \frac{\pi^2}{6} n^2$; $\frac{T_n}{n\ln n} \to 1$; borne $\approx 0{,}245$ pour $n = 100$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).