Plaquette 5 – Synthèse : simulation, approximation et décisions à long terme

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Monte-Carlo. Pour estimer $\theta = \mathbb{E}(g(Z))$, on simule $Z_1, \dots, Z_n$ indépendantes et l'on calcule $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum g(Z_i)$:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}(g(Z))}{n\varepsilon^2}$$

— Erreur en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, **quelle que soit la dimension** de Z ; on gagne en réduisant $\mathrm{V}(g(Z))$ (variables antithétiques).

— Précision **relative** η sur une petite probabilité p : $n \geq \frac{1-p}{p\,\alpha\,\eta^2}$.

Polynômes de Bernstein. Pour f continue sur $[0,1]$ et $S_n \sim B(n,x)$:

$$B_n f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Croissance multiplicative. Si $C_n = C_0 \prod_{i \leq n} R_i$ avec $R_i > 0$ indépendants de même loi, alors $\frac{1}{n}\ln C_n \to \mathbb{E}(\ln R)$ en probabilité : le capital typique évolue comme $\mathrm{e}^{n\mathbb{E}(\ln R)}$, même si $\mathbb{E}(C_n) = C_0\,\mathbb{E}(R)^n$.

Correction de l'exercice 1 – Estimer π par une grille

a) Les indicatrices $1_{\{U_i^2+V_i^2 \leq 1\}}$ sont indépendantes de loi $B\left(\frac{\pi}{4}\right)$: **loi faible**, $F_n \to \frac{\pi}{4}$, donc $4F_n \to \pi$.

b) Avec $p = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785\,4$:

$$\mathrm{V}(4F_n) = \frac{16\,p(1-p)}{n} \approx \frac{16 \times 0{,}168\,5}{n} \approx \frac{2{,}696}{n}$$

c) **Tchebychev** : $\frac{2{,}696}{n \times 0{,}0001} \leq 0{,}05$, soit $n \geq 539\,400$ points environ.

— **Lecture** : plus d'un demi-million de points pour deux décimales ; chaque décimale supplémentaire coûte un facteur 100. Monte-Carlo est lent, mais sa vitesse ne dépend pas de la dimension.

Réponse. $4F_n \to \pi$; $\mathrm{V}(4F_n) \approx \frac{2{,}696}{n}$; $n \approx 539\,400$.

Correction de l'exercice 2 – Compter les nombres premiers par sondage

a) $1_{\{K_i \text{ premier}\}} \sim B(p)$ avec $p = \frac{P}{N}$: $\mathbb{E}(\hat{P}) = Np = P$, et $F \to p$ (loi faible), donc $\hat{P} \to P$.

b) $p = 0{,}078\,498$:

$$\sigma(\hat{P}) = N\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 10^6\sqrt{\frac{0{,}078\,498 \times 0{,}921\,502}{10^4}} \approx 2\,690$$

c) Marge ε telle que $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 0{,}05$: $\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{0{,}05}} \approx 12\,030$, soit environ $\pm 15\,\%$ de P.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lecture** : 10^4 tests au lieu de 10^6 donnent l'ordre de grandeur ; pour ±1 % il faudrait multiplier n par environ 230, soit plus que N lui-même — le sondage n'a d'intérêt que si le dénombrement exact est hors de portée.

Réponse. $\hat{P}$ sans biais et convergent ; $\sigma \approx 2\,690$; marge $\approx \pm 12\,030$ (15 %).

Correction de l'exercice 3 – Simuler un temps d'attente

a) Script :

```
import random

def attente_pp():
    n, avant = 0, 0
    while True:
        n += 1
        x = random.randint(0, 1)   # 1 = pile
        if x == 1 and avant == 1:
            return n
        avant = x

def moyenne(N):
    return sum(attente_pp() for _ in range(N)) / N
```

b) Les durées simulées sont indépendantes, d'espérance 6 et de variance 22 : **Tchebychev**,

$$\mathbb{P}\left(|\overline{T}_N - 6| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{22}{N \times 0{,}01} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow N \geq 44\,000$$

c) Les trois moyennes sont à moins de 0,02 de 6, bien dans la marge garantie : la borne de Tchebychev est très prudente (l'écart type de $\overline{T}_N$ vaut $\sqrt{\frac{22}{44\,000}} \approx 0{,}022$).

Réponse. $N \geq 44\,000$; résultats cohérents, écart type de la moyenne $\approx 0{,}022$.

Correction de l'exercice 4 – Le théorème de Weierstrass par les probabilités

a) $f(x) = \mathbb{E}[f(x)]$, donc $B_n f(x) - f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right]$, et $|\mathbb{E}(Z)| \leq \mathbb{E}|Z|$.

b) Sur $\left\langle \left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \delta \right\rangle$, l'écart est $< \varepsilon$; ailleurs il est $\leq 2M$. Donc, avec **Tchebychev** ($\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$) :

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M\,\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \varepsilon + \frac{2M}{4n\delta^2} = \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$$

c) La borne ne dépend **pas** de x : $\sup_{[0,1]} |B_n f - f| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$, qui est $\leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

— **Conclusion** : toute fonction continue sur $[0, 1]$ est limite uniforme de polynômes (théorème de Weierstrass), et la loi faible fournit même les polynômes explicitement.

Réponse. $|B_n f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$ uniformément : $B_n f \to f$ uniformément.

Correction de l'exercice 5 – Bernstein pour la fonction carré

a) **König-Huygens** : $\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right] = \mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)^2$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$B_n f(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

b) $B_n f(x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{n}$, maximal en $x = \frac{1}{2}$: $\sup |B_n f - f| = \frac{1}{4n}$.

c) $\frac{1}{4n} \leq 10^{-3}$ donne $n \geq 250$.

— **Commentaire** : un polynôme de degré 250 pour approcher x^2, qui est lui-même un polynôme de degré 2 ! Les polynômes de Bernstein convergent toujours, mais lentement (en $\frac{1}{n}$) ; leur intérêt est théorique (existence) et géométrique (ils préservent la monotonie et la convexité).

Réponse. $B_n f(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$; erreur $\frac{1}{4n}$; $n \geq 250$.

Correction de l'exercice 6 – Entropie et suites typiques

a) Les variables $Z_i = -\ln \mathbb{P}(X_i = X_i)$ valent $-\ln p$ si $X_i = 1$ et $-\ln(1-p)$ sinon : indépendantes, de même loi, bornées, d'espérance

$$\mathbb{E}(Z_i) = -p \ln p - (1-p)\ln(1-p) = H$$

— Par **indépendance**, $-\ln \pi_n = \sum Z_i$, et la **loi faible** donne $-\frac{1}{n}\ln \pi_n \to H$.

b) $H = -0{,}1 \ln 0{,}1 - 0{,}9 \ln 0{,}9 \approx 0{,}230 + 0{,}095 = 0{,}325$ nat.

c) $\pi_{100} \approx \mathrm{e}^{-32{,}5}$; les suites typiques, de probabilité totale proche de 1, sont donc environ $\mathrm{e}^{32{,}5} \approx 1{,}3 \times 10^{14}$, contre $2^{100} \approx 1{,}3 \times 10^{30}$.

— **Lecture** : presque toute la probabilité est portée par une infime fraction des suites ; on peut donc les coder avec environ $\frac{100H}{\ln 2} \approx 47$ bits au lieu de 100 — c'est le principe de la compression (théorème de Shannon).

Réponse. $-\frac{1}{n}\ln \pi_n \to H \approx 0{,}325$; $\approx 10^{14}$ suites typiques contre 10^{30}.

Correction de l'exercice 7 – Un placement qui monte en moyenne et ruine presque sûrement

a) Par **indépendance**, $\mathbb{E}(C_n) = \mathbb{E}(R)^n$ avec $\mathbb{E}(R) = \frac{1{,}5 + 0{,}6}{2} = 1{,}05$: l'espérance croît de 5 % par an.

b) $\ln C_n = \sum_{i \leq n} \ln R_i$, somme de variables indépendantes bornées : **loi faible**,

$$\frac{1}{n}\ln C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\ln R) = \frac{\ln 1{,}5 + \ln 0{,}6}{2} = \frac{\ln 0{,}9}{2} \approx -0{,}053$$

c) Pour $\varepsilon > 0$, avec probabilité tendant vers 1, $\ln C_n \leq n(-0{,}053 + 0{,}02) \to -\infty$: donc $\mathbb{P}(C_n \geq \varepsilon) \to 0$.

— $\mathbb{E}(C_{100}) = 1{,}05^{100} \approx 131{,}5$, alors que la valeur typique est $\mathrm{e}^{-5{,}27} \approx 0{,}005$.

— **Paradoxe résolu** : l'espérance est portée par des trajectoires extrêmement rares (beaucoup de hausses), qui ne concernent presque aucun investisseur.

Réponse. $\mathbb{E}(C_n) = 1{,}05^n$; $\frac{1}{n}\ln C_n \to \frac{\ln 0{,}9}{2} < 0$; $C_n \to 0$; 131,5 contre 0,005.

Correction de l'exercice 8 – Mutualiser les risques

a) $X = 10^4 B$ avec $B \sim B(0{,}01)$: $\mathbb{E}(X) = 100$ et $\sigma^2 = 10^8 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 990\,000$.

b) **Tchebychev** sur la moyenne $\overline{X}_n$ (unilatéral inclus dans bilatéral) :

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}_n > 100 + c\right) \leq \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - 100| \geq c\right) \leq \frac{990\,000}{nc^2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On veut $\frac{990\,000}{nc^2} \le 0{,}01$, soit $c \ge \sqrt{\frac{9{,}9 \times 10^7}{n}}$:

— $n = 10^4$: $c \ge \sqrt{9\,900} \approx 99{,}5$ € ;
— $n = 10^6$: $c \ge 9{,}95$ €.
— **Lecture** : le chargement de sécurité décroît comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$; c'est la loi des grands nombres qui rend l'assurance possible, et qui pousse les assureurs à grossir (ou à se réassurer).

Réponse. $\sigma^2 = 990\,000$; risque $\le \frac{990\,000}{nc^2}$; $c \approx 99{,}5$ € puis 9,95 €.

Correction de l'exercice 9 – Estimer 1/e en mélangeant des cartes

a) **Loi faible** : $F \to d_{52}$, et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en $d_{52} > 0$, donc $\frac{1}{F} \to \frac{1}{d_{52}} \approx \mathrm{e}$.

b) $\mathrm{V}(F) = \frac{d(1-d)}{N}$ avec $d(1-d) \approx 0{,}368 \times 0{,}632 \approx 0{,}2325$:

$$\frac{0{,}2325}{N \times 0{,}0001} \le 0{,}05 \Leftrightarrow N \ge 46\,500$$

c) La précision est en $\frac{1}{\sqrt{N}}$: pour k décimales exactes, il faut de l'ordre de 10^{2k} mélanges, alors que la série $\sum \frac{1}{n!}$ donne 15 décimales avec 18 termes.

— **Intérêt** : la méthode montre que e « apparaît » dans une expérience concrète ; Monte-Carlo sert quand aucune formule n'est disponible, pas pour concurrencer un calcul exact.

Réponse. $\frac{1}{F} \to \mathrm{e}$; $N \ge 46\,500$; convergence en $\frac{1}{\sqrt{N}}$, trop lente.

Correction de l'exercice 10 – Variables antithétiques

a) $\mathbb{E}\left(D^4\right) = \frac{2\,275}{6}$, donc $\mathrm{V}\left(D^2\right) = \frac{2\,275}{6} - \left(\frac{91}{6}\right)^2 = \frac{5\,369}{36} \approx 149{,}1$.

b) $7 - D$ a même loi que D, donc $\mathbb{E}(Y) = \theta$. Y vaut 18,5 ($D \in \{1, 6\}$), 14,5 ($D \in \{2, 5\}$), 12,5 ($D \in \{3, 4\}$), chacun avec probabilité $\frac{1}{3}$:

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{18{,}5^2 + 14{,}5^2 + 12{,}5^2}{3} - \left(\frac{91}{6}\right)^2 = 236{,}25 - 230{,}03 \approx 6{,}22$$

c) Avec n dés : moyenne de n valeurs de D^2, variance $\frac{149{,}1}{n}$; moyenne de n valeurs de Y, variance $\frac{6{,}22}{n}$.

— Gain d'un facteur 24 environ (et encore 12 si l'on compte deux évaluations de la fonction par dé).
— **Pourquoi** : D^2 et $(7-D)^2$ sont **négativement corrélés** (l'un est grand quand l'autre est petit), et leur moyenne compense les écarts.

Réponse. $\mathrm{V}(D^2) \approx 149{,}1$; $\mathrm{V}(Y) \approx 6{,}22$; gain d'un facteur 24 environ.

Correction de l'exercice 11 – Précision relative pour une probabilité faible

a) **Tchebychev** avec $\varepsilon = 0{,}1p$:

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \ge 0{,}1p) \le \frac{1-p}{0{,}01\,np} \le 0{,}05 \Leftrightarrow n \ge \frac{1-p}{0{,}000\,5\,p}$$

— $p \approx 0{,}039$: $n \ge \frac{0{,}961}{0{,}000\,5 \times 0{,}039} \approx 49\,300$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $p \approx 5{,}0 \times 10^{-5}$: $n \geq \dfrac{1-p}{0{,}000\,5 \times 5{,}0 \times 10^{-5}} \approx 4 \times 10^{7}$ simulations, pour observer en moyenne seulement 2 000 succès.

c) Le nombre de simulations croît comme $\frac{1}{p}$: les événements rares sont hors de portée de la simulation naïve, qui ne les observe presque jamais. On recourt alors au calcul exact quand il existe, ou à des méthodes de réduction de variance (échantillonnage préférentiel).

Réponse. $\approx 49\,300$ simulations ; $\approx 4 \times 10^{7}$ pour $p \approx 5 \times 10^{-5}$.

Correction de l’exercice 12 – Le jeu de Saint-Pétersbourg plafonné

a) $\mathbb{P}(K = k) = 2^{-k}$ et $\mathbb{P}(K > 20) = 2^{-20}$:

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{k=1}^{20} 2^{k} \times 2^{-k} + 2^{20} \times 2^{-20} = 20 + 1 = 21$$

b) $\mathbb{E}\left(G^2\right) = \sum_{k=1}^{20} 4^{k} 2^{-k} + 4^{20} 2^{-20} = (2^{21} - 2) + 2^{20} = 3 \times 2^{20} - 2 = 3\,145\,726$, et

— $\mathrm{V}(G) = 3\,145\,726 - 441 = 3\,145\,285$ (écart type $\approx 1\,774$ €).

c) $\dfrac{\mathrm{V}(G)}{n \times 1} \leq 0{,}05$ donne $n \geq 6{,}3 \times 10^{7}$ parties.

— **Commentaire** : l’espérance est finie (21 €), mais elle est portée par des gains rarissimes ; un joueur ordinaire, même sur des milliers de parties, verra une moyenne bien inférieure à 21. Sans plafond, l’espérance est infinie et la loi faible ne s’applique plus du tout.

Réponse. $\mathbb{E}(G) = 21$; $\mathrm{V}(G) = 3\,145\,285$; $n \approx 6{,}3 \times 10^{7}$ parties.

Correction de l’exercice 13 – Mesures répétées

a) Les mesures $M_i = \ell + E_i$ sont indépendantes, d’espérance ℓ et de variance 0,25 : **loi faible**, $\overline{M}_n \to \ell$.

b) **Tchebychev** :

$$\mathbb{P}\left(|\overline{M}_n - \ell| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{0{,}25}{n \times 0{,}01} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \geq 500$$

c) Les mesures ont alors pour espérance $\ell + 0{,}2$: $\overline{M}_n \to \ell + 0{,}2$.

— **Leçon** : répéter les mesures élimine l’erreur **aléatoire**, jamais l’erreur **systématique** ; il faut étalonner l’appareil. La loi faible ne corrige pas un biais.

Réponse. $\overline{M}_n \to \ell$; 500 mesures ; avec biais, $\overline{M}_n \to \ell + 0{,}2$.

Correction de l’exercice 14 – Le volume d’une boule en dimension 10

a) Une grille à 10 points par axe en dimension 10 compte 10^{10} points — et ne donne qu’une précision grossière.

b) **Tchebychev** pour une erreur relative $\eta = 0{,}1$:

$$n \geq \frac{1-p}{p\,\alpha\,\eta^2} = \frac{0{,}997\,5}{0{,}002\,49 \times 0{,}05 \times 0{,}01} \approx 8{,}0 \times 10^{5}$$

c) Monte-Carlo demande environ 10^{4} fois moins de points.

— **Lecture** : la variance de Monte-Carlo ne dépend que de p, pas de la dimension, alors que le coût d’une grille croît exponentiellement avec la dimension (« malédiction de la dimension »). En revanche, p devient minuscule en grande dimension (la boule

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

n'occupe presque rien du cube), ce qui rend la précision relative coûteuse.

Réponse. Grille : 10^{10} points ; Monte-Carlo : $\approx 8 \times 10^5$ points.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : quelle fraction du capital miser ?

a) **Indépendance** : $\mathbb{E}(C_n) = (1 + f(p-q))^n = (1 + 0{,}2f)^n$, croissante en f : la mise maximale maximise l'espérance (et mène à la ruine dès la première perte si $f \to 1$).

b) $\ln C_n = \sum_{i \leq n} \ln R_i$ avec $R_i \in \{1+f, 1-f\}$, variables indépendantes bornées : **loi faible**,

$$\frac{1}{n} \ln C_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\ln R) = p \ln(1+f) + q \ln(1-f)$$

c) $g'(f) = \frac{p}{1+f} - \frac{q}{1-f} = \frac{p-q-f}{(1+f)(1-f)}$, qui s'annule en $f^* = p - q = 0{,}2$ (g est concave).
$g(0{,}2) = 0{,}6 \ln 1{,}2 + 0{,}4 \ln 0{,}8 \approx 0{,}0201$.

d) Capital typique après 100 tours :

— $f^* = 0{,}2$: $\mathrm{e}^{100 \times 0{,}0201} \approx 7{,}5$;

— $f = 0{,}5$: $g(0{,}5) = 0{,}6 \ln 1{,}5 + 0{,}4 \ln 0{,}5 \approx -0{,}034$, capital typique $\mathrm{e}^{-3{,}4} \approx 0{,}033$, alors que $\mathbb{E}(C_{100}) = 1{,}1^{100} \approx 13\,800$.

— **Lecture** : c'est le **critère de Kelly** ; à long terme, on maximise la croissance **typique** $\mathbb{E}(\ln R)$, pas l'espérance, qui est dominée par des trajectoires exceptionnelles.

Réponse. $\mathbb{E}(C_n) = (1 + 0{,}2f)^n$; $f^* = 0{,}2$, $g(f^*) \approx 0{,}020$; typiquement 7,5 contre 0,033 pour $f = 0{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).