Plaquette 1 – Convergence en probabilité, loi des grands nombres et méthode de Monte-Carlo

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On démontre la **loi faible** par Bienaymé-Tchebychev, on l'applique à l'estimation d'une fréquence ou d'une intégrale (**Monte-Carlo**), et on dimensionne un échantillon pour une précision donnée.

Exercice 1 – Convergence en probabilité

Soit X_n de loi $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$. Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité, mais que $\mathbb{E}(X_n) \not\to 0$.

Exercice 2 – Loi faible des grands nombres

On lance un dé n fois et on note $\overline{X}_n$ la moyenne des résultats. Majorer $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - 3{,}5\right| \geq 0{,}1\right)$ pour $n = 10\,000$.

Exercice 3 – Taille d'échantillon

Combien de lancers d'une pièce faut-il pour être sûr à 99 % que la fréquence de piles s'écarte de moins de 0,02 de 0,5 ?

Exercice 4 – Estimation d'une proportion

Un sondage sur 1 000 personnes donne 52 % d'intentions favorables. Quelle précision garantit Bienaymé-Tchebychev à 95 % ?

Exercice 5 – Méthode de Monte-Carlo

Expliquer comment estimer π en tirant des points au hasard dans le carré $[0\,;1]^2$, et donner la précision pour $n = 10^6$ tirages.

Exercice 6 – Monte-Carlo pour une intégrale

Estimer $I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ par Monte-Carlo : donner l'estimateur, son espérance et sa variance.

Exercice 7 – Loi faible sans variance finie

La loi faible s'applique-t-elle si les X_i n'ont pas de variance finie ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Convergence en probabilité et opérations

Soient $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$. Montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a + b$.

Exercice 9 – Fréquence empirique

On veut estimer la proportion p de pièces défectueuses. Sur 500 pièces, on en trouve 15 défectueuses. Donner l'estimation et un intervalle par Tchebychev à 90 %.

Exercice 10 – Loi des grands nombres et simulation

Écrire en Python une simulation estimant $\mathbb{E}(X)$ pour X le maximum de deux dés, et indiquer la valeur attendue.

Exercice 11 – Comparaison avec le théorème central limite

Pour $n = 100$ lancers d'une pièce, comparer la majoration de Tchebychev et la valeur exacte de $\mathbb{P}(|F_n - 0{,}5| \geq 0{,}1)$.

Exercice 12 – Fréquences de succès hétérogènes

Un standard reçoit des appels ; le i-ième appel aboutit à une vente avec probabilité $p_i \in [0,1]$, indépendamment. Soit V_n le nombre de ventes sur les n premiers appels et $\overline{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$.

a) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{V_n}{n} - \overline{p}_n\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

b) En déduire que si $\overline{p}_n \to \ell$, alors $\frac{V_n}{n} \to \ell$ en probabilité.

c) Application : $p_i = 0{,}2$ pour i impair et $0{,}4$ pour i pair.

Exercice 13 – Le maximum d'un échantillon

On tire n numéros indépendants uniformes dans $\{1, \ldots, N\}$ et l'on note M_n le plus grand.

a) Calculer $\mathbb{P}(M_n < N)$.

b) En déduire que $M_n \to N$ en probabilité quand $n \to +\infty$.

c) Combien de tirages faut-il pour que $\mathbb{P}(M_n = N) \geq 0{,}99$ lorsque $N = 100$?

Exercice 14 – Moment d'ordre deux empirique

On lance n fois un dé équilibré, résultats $D_1, \ldots, D_n$, et l'on pose $Q_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^2$.

a) Vers quoi Q_n converge-t-elle en probabilité ? Justifier.

b) Calculer $\mathrm{V}\left(D^2\right)$ et majorer $\mathbb{P}\left(\left|Q_n - \frac{91}{6}\right| \geq 1\right)$.

c) En déduire que $Q_n - \overline{D}_n^2$ converge en probabilité vers $\frac{35}{12}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : contrôle de production

Une usine produit des pièces dont la longueur a pour moyenne 100 mm et pour écart type 2 mm. On prélève n pièces.

a) Quelle taille n garantit que la moyenne de l'échantillon s'écarte de moins de 0,5 mm avec une probabilité d'au moins 0,95 ?

b) Commenter la robustesse du résultat.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).