Plaquette 2 – Convergence en probabilité : propriétés et contre-exemples

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour montrer $X_n \to X$ en probabilité, on **majore** $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$: calcul direct, Markov ou Tchebychev. Pour combiner des convergences, on **découpe l'écart** ($|a+b| \geq 2\varepsilon \Rightarrow |a| \geq \varepsilon$ ou $|b| \geq \varepsilon$) et on majore la probabilité d'une réunion par la somme. Pour réfuter, on exhibe un **contre-exemple** à deux valeurs : la convergence en probabilité ne dit rien des valeurs rares mais énormes.

Exercice 1 – Variables de Bernoulli

Soit $X_n \sim B(p_n)$.

a) Pour $0 < \varepsilon \leq 1$, calculer $\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon)$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $X_n \to 0$ en probabilité.

c) Même question pour $X_n \to 1$.

Exercice 2 – Une loi de Poisson qui s'évanouit

Soit $X_n \sim P\left(\frac{1}{n}\right)$ et (a_n) une suite réelle positive quelconque.

a) Montrer que $X_n \to 0$ en probabilité.

b) Montrer que $a_n X_n \to 0$ en probabilité, même si $a_n \to +\infty$.

c) Calculer $\mathbb{E}(nX_n)$ et commenter.

Exercice 3 – Unicité de la limite

On suppose $X_n \to X$ et $X_n \to Y$ en probabilité.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - Y| \geq 2\varepsilon) = 0$.

b) En déduire que $X = Y$ presque sûrement.

Exercice 4 – Produit de deux suites convergentes

Soient $X_n \to a$ et $Y_n \to b$ en probabilité (a, b réels).

a) Montrer que si $U_n \to 0$ et $V_n \to 0$ en probabilité, alors $U_n V_n \to 0$.

b) Montrer que si $U_n \to 0$ en probabilité et c est un réel, $cU_n \to 0$.

c) En écrivant $X_n Y_n - ab = (X_n - a)(Y_n - b) + a(Y_n - b) + b(X_n - a)$, conclure que $X_n Y_n \to ab$.

Exercice 5 – Image par une fonction continue

Soit $X_n \to a$ en probabilité et f continue en a.

a) Montrer que $f(X_n) \to f(a)$ en probabilité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Application : $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes de loi $G(p)$. Montrer que $\frac{1}{\overline{X}_n} \to p$ en probabilité.
c) On observe 50 temps d'attente de moyenne 4. Estimer p.

Exercice 6 – Convergence en moyenne quadratique

Soit (X_n) telle que $\mathbb{E}(X_n) = a + \frac{1}{n}$ et $\mathrm{V}(X_n) = \frac{1}{n}$.

a) Calculer $\mathbb{E}\left[(X_n - a)^2\right]$.
b) En déduire que $X_n \to a$ en probabilité, avec une majoration explicite.
c) Montrer que la réciproque est fausse à l'aide de Y_n valant n avec probabilité $\frac{1}{n}$ et 0 sinon.

Exercice 7 – Variables bornées : les espérances convergent

Soit (X_n) telle que $|X_n| \leq M$ pour tout n, et $X_n \to a$ en probabilité.

a) Montrer que $|a| \leq M$.
b) Montrer que $|\mathbb{E}(X_n) - a| \leq \varepsilon + 2M\,\mathbb{P}(|X_n - a| \geq \varepsilon)$.
c) En déduire $\mathbb{E}(X_n) \to a$. Pourquoi l'hypothèse de bornitude est-elle indispensable ?

Exercice 8 – Une perturbation qui s'efface

Soit X une variable aléatoire réelle quelconque (pas forcément bornée ni intégrable) et $X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)X$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X| \geq n\varepsilon)$.
b) En déduire que $X_n \to X$ en probabilité.
c) Application : X de loi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ ($k \geq 1$, sans espérance). Calculer $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq 1)$.

Exercice 9 – Sans indépendance, la moyenne peut ne pas converger

Soit $X \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ et $X_i = X$ pour tout i.

a) Les X_i ont-elles même loi, une espérance, une variance ?
b) Calculer $\overline{X}_n$ et $\mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{4}\right)$.
c) Quelle étape de la preuve de la loi faible échoue ?

Exercice 10 – Convergence vers une constante et fonction de répartition

Soit $X_n \to a$ en probabilité, et $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$.

a) Montrer que $F_n(x) \to 1$ si $x > a$ et $F_n(x) \to 0$ si $x < a$.
b) Application : $Y_n = \frac{S_n}{n}$ avec $S_n \sim B(n; 0{,}3)$; limite de $\mathbb{P}(Y_n \leq 0{,}25)$ et de $\mathbb{P}(Y_n \leq 0{,}35)$.
c) Que peut-on dire de $F_n(a)$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Deux estimateurs asymptotiquement équivalents

On estime la probabilité p d'un succès par la fréquence $F_n = \frac{S_n}{n}$ ou par l'estimateur de Laplace $L_n = \frac{S_n + 1}{n + 2}$.

a) Montrer que si $X_n - Y_n \to 0$ et $Y_n \to a$ en probabilité, alors $X_n \to a$.

b) Majorer $|L_n - F_n|$ et en déduire que $L_n \to p$.

c) Calculer les deux estimations quand on observe 0 succès sur 10 essais. Quel est l'intérêt de L_n ?

Exercice 12 – Le minimum de temps d'attente

n guichets fonctionnent en parallèle ; au guichet i, le premier client est servi au bout de $T_i \sim G(p)$ minutes, indépendamment. Soit $m_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.

a) Calculer $\mathbb{P}(m_n > 1)$.

b) En déduire que $m_n \to 1$ en probabilité.

c) Pour $p = 0{,}1$, combien de guichets faut-il pour que $\mathbb{P}(m_n = 1) \geq 0{,}95$?

Exercice 13 – Les variances ne suivent pas

Soit $X_n = a + n\,1_{A_n}$, où $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer que $X_n \to a$ en probabilité.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{V}(X_n)$, et leurs limites.

c) Modifier l'exemple pour que $\mathrm{V}(X_n) \to +\infty$ tout en gardant $X_n \to a$.

Exercice 14 – Même loi ne veut pas dire proches

Soit $X \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ et, pour tout n, $X_n = 1 - X$.

a) Montrer que X_n a même loi que X.

b) Calculer $\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \frac{1}{2}\right)$. Conclure.

c) Plus généralement, si $X_n \to X$ en probabilité et X_n a même loi que Y pour tout n, que dire de X et Y ? (On admettra que la convergence en probabilité vers X entraîne $\mathbb{P}(X_n \leq x) \to \mathbb{P}(X \leq x)$ en tout x où cette dernière fonction est continue.)

Exercice 15 – Synthèse : combien de cycles a une grande permutation ?

Soit C_n le nombre de cycles d'une permutation uniforme de S_n. On admet $\mathbb{E}(C_n) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\mathrm{V}(C_n) = H_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\mathrm{V}(C_n) \leq H_n$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(|C_n - H_n| \geq \varepsilon H_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 H_n}$.

c) En déduire que $\frac{C_n}{\ln n} \to 1$ en probabilité.

d) Pour $n = 10^6$ ($H_n \approx 14{,}39$), majorer la probabilité que C_n s'écarte de plus de 50 % de sa moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).