Plaquette 4 – Au-delà du cadre classique : dépendance, hétérogénéité, comptages

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La preuve de la loi faible ne repose que sur une chose : $\mathrm{V}(S_n) = o(n^2)$ (ou $o\left(\mathbb{E}(S_n)^2\right)$ pour un comptage). On calcule donc la **variance de la somme** avec ses covariances, et l'on vérifie qu'elle est négligeable devant le carré de la normalisation : variances bornées ou lentement croissantes, covariances nulles, négatives ou décroissantes. Quand la variance n'existe pas, on **tronque**.

Exercice 1 – Variances lentement croissantes

Soient $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes avec $\mathbb{E}(X_i) = 0$ et $\mathrm{V}(X_i) \leq Ci^{\alpha}$ ($C > 0$, $\alpha \geq 0$).

a) Montrer que $\mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq Cn^{\alpha - 1}$.

b) En déduire que $\frac{S_n}{n} \to 0$ en probabilité si $\alpha < 1$.

c) Exemple : $X_i = \pm i^{1/4}$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Majorer $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq 0{,}1\right)$ pour $n = 10^4$.

Exercice 2 – Un million de bits à partir de vingt

Soient $B_1, \ldots, B_k$ des bits indépendants de loi $B\left(\frac{1}{2}\right)$. Pour toute partie non vide $A \subset \{1, \ldots, k\}$, on pose $X_A = \sum_{j \in A} B_j \bmod 2$ (« ou exclusif »).

a) Montrer que chaque X_A suit $B\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) Montrer que X_A et $X_{A'}$ sont indépendantes si $A \neq A'$ (choisir j dans l'une et pas dans l'autre).

c) En déduire que la fréquence F des 1 parmi les $N = 2^k - 1$ variables vérifie $\mathbb{P}\left(|F - \frac{1}{2}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4N\varepsilon^2}$. Application : $k = 20$, $\varepsilon = 0{,}01$.

Exercice 3 – Covariances qui s'effacent

Soient $X_1, X_2, \ldots$ de variances finies telles que $|\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| \leq r(|i - j|)$, où $r(k) \to 0$ quand $k \to +\infty$.

a) Montrer que $\mathrm{V}(S_n) \leq 2n \sum_{k=0}^{n-1} r(k)$.

b) En déduire que $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \to 0$ en probabilité.

c) Que dire si $r(k) = \rho^k$ avec $0 < \rho < 1$?

Exercice 4 – Une suite de bits avec mémoire

Soit $X_1 \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ et, pour $i \geq 1$: avec probabilité $a \in]0, 1[$, $X_{i+1} = X_i$; sinon X_{i+1} est un bit neuf de loi $B\left(\frac{1}{2}\right)$, tous les choix étant indépendants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que chaque X_i suit $B\left(\frac{1}{2}\right)$ et que $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+k}) = \frac{a^k}{4}$.

b) En déduire $\mathrm{V}(S_n) \leq \frac{n}{4} \cdot \frac{1+a}{1-a}$ et la convergence de la fréquence des 1 vers $\frac{1}{2}$.

c) Pour $a = 0{,}9$, combien d'observations faut-il, par Tchebychev, par rapport au cas indépendant ?

Exercice 5 – Une pièce choisie au hasard

On choisit une pièce au hasard : $\Pi = 0{,}3$ ou $0{,}7$ avec probabilité $\frac{1}{2}$. Puis, sachant $\Pi = \pi$, on la lance indéfiniment : les X_i sont indépendantes de loi $B(\pi)$.

a) Montrer que $\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \Pi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

b) Montrer que $\overline{X}_n$ ne converge en probabilité vers aucune constante.

c) Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$ et expliquer l'échec de la loi faible usuelle.

Exercice 6 – Moyennes pondérées

Soient $X_1, X_2, \ldots$ indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$, et des poids $a_i > 0$. On pose $W_n = \dfrac{\sum_{i \leq n} a_i X_i}{\sum_{i \leq n} a_i}$.

a) Montrer que $W_n \to \mu$ en probabilité dès que $\dfrac{\sum a_i^2}{\left(\sum a_i\right)^2} \to 0$.

b) Vérifier cette condition pour $a_i = i$ (on pondère davantage les observations récentes).

c) Étudier $a_i = 2^i$: que vaut le rapport, et que représente W_n ?

Exercice 7 – Concentration d'un événement rare

Soit $S_n \sim B(n, p_n)$ avec $np_n \to +\infty$.

a) Montrer que $\frac{S_n}{np_n} \to 1$ en probabilité.

b) Application : 10^7 connexions, chacune malveillante avec probabilité 10^{-4}. Majorer la probabilité que le nombre d'attaques s'écarte de plus de 10 % de sa moyenne.

c) Que se passe-t-il si $np_n = \lambda$ reste constant ?

Exercice 8 – Proportion de boîtes vides

On lance n boules au hasard dans n boîtes (indépendamment, uniformément). Soit Y_n le nombre de boîtes vides.

a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ et sa limite après division par n.

b) Montrer que les covariances des indicatrices de boîtes vides sont négatives et en déduire $\mathrm{V}(Y_n) \leq \frac{n}{4}$.

c) En déduire $\frac{Y_n}{n} \to \mathrm{e}^{-1}$ en probabilité. Application : $n = 10^5$, $\varepsilon = 0{,}01$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Le nombre d'inversions se concentre

Le nombre I_n d'inversions d'une permutation uniforme vérifie $\mathbb{E}(I_n) = \frac{n(n-1)}{4}$ et $\mathrm{V}(I_n) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$.

a) Montrer que $\mathrm{V}(I_n) \leq \frac{n^3}{18}$ pour $n \geq 1$.

b) En déduire que $\frac{I_n}{n^2} \to \frac{1}{4}$ en probabilité.

c) Interpréter pour le tri par insertion d'un tableau de 10^4 éléments ($\varepsilon = 0{,}01$).

Exercice 10 – Paires de dés identiques

On lance n dés équilibrés ; X est le nombre de paires $\{i,j\}$ ($i<j$) telles que $D_i = D_j$, et $N = \binom{n}{2}$.

a) Montrer que deux indicatrices de paires distinctes sont indépendantes (distinguer paires disjointes et paires partageant un dé).

b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

c) Montrer que $\frac{X}{N} \to \frac{1}{6}$ en probabilité. Les indicatrices sont-elles mutuellement indépendantes ?

Exercice 11 – Vitesse d'une marche aléatoire

Une marche part de 0 et fait des pas $+1$ (probabilité p) ou -1 (probabilité q) indépendants ; S_n est sa position.

a) Montrer que $\frac{S_n}{n} \to p - q$ en probabilité, avec une borne explicite.

b) Pour $p = q$, montrer que $\frac{S_n}{n} \to 0$ mais que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ ne tend pas vers 0 en probabilité (on admettra $\mathbb{P}(|S_n| \geq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{4}$ pour n grand, ou on raisonnera par la variance).

c) Une particule fait 10^6 pas avec $p = 0{,}51$. Majorer la probabilité que sa vitesse moyenne s'écarte de 0,02 de plus de 0,005.

Exercice 12 – Toutes les fréquences à la fois

On lance n fois un dé équilibré ; $F_n(k)$ est la fréquence de la face k.

a) Majorer $\mathbb{P}\left(|F_n(k) - \frac{1}{6}| \geq \varepsilon\right)$ pour une face k.

b) En déduire que $M_n = \max_k |F_n(k) - \frac{1}{6}| \to 0$ en probabilité.

c) Combien de lancers garantissent $M_n < 0{,}01$ avec probabilité 0,95 ?

Exercice 13 – Sans contrôle des variances, la loi faible échoue

Soient $X_i = \pm 2^i$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun, indépendantes ; $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a) Montrer que $|X_1 + \cdots + X_{n-2}| \leq 2^{n-1} - 2$.

b) En déduire que si X_{n-1} et X_n ont le même signe, $|S_n| \geq 2^n + 2$.

c) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \frac{2^n}{n}\right) \geq \frac{1}{2}$ et conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Loi faible sans variance : la troncature

Soient $X_1, X_2, \dots$ indépendantes de loi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k^3}$ ($k \geq 1$, $c = \frac{1}{\zeta(3)}$) : $\mu = \mathbb{E}(X)$ est finie mais $\mathrm{V}(X) = +\infty$. On pose $Y_i = X_i 1_{\{X_i \leq n\}}$ (troncature au niveau n).

a) Montrer que $\mathbb{P}(\exists i \leq n,\, Y_i \neq X_i) \leq n\,\mathbb{P}(X > n) \leq \frac{c}{2n}$ (on admettra $\mathbb{P}(X > n) \leq \frac{c}{2n^2}$).

b) Montrer que $\mathrm{V}(Y_1) \leq c \sum_{k \leq n} \frac{1}{k} \leq c(1 + \ln n)$, puis que $\frac{1}{n}\sum_{i \leq n}(Y_i - \mathbb{E}Y_1) \to 0$ en probabilité.

c) En déduire que $\overline{X}_n \to \mu$ en probabilité.

Exercice 15 – Synthèse : le collectionneur se concentre

Il faut T_n achats pour réunir n vignettes uniformes. On rappelle $\mathbb{E}(T_n) = nH_n$ et $\mathrm{V}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-k)}{k^2}$.

a) Montrer que $\mathrm{V}(T_n) \leq \frac{\pi^2}{6} n^2$.

b) En déduire $\mathbb{P}(|T_n - nH_n| \geq \varepsilon n H_n) \leq \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2 H_n^2}$.

c) Montrer que $\frac{T_n}{n \ln n} \to 1$ en probabilité.

d) Application $n = 100$: $\mathbb{E}(T_{100}) \approx 518{,}7$; majorer la probabilité de s'écarter de plus de 50 % de cette moyenne, et comparer l'écart type exact ($\approx 125{,}8$) à la borne de a).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).