Plaquette 5 – Synthèse : simulation, approximation et décisions à long terme

Loi faible des grands nombres — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La loi faible transforme une **espérance** en **moyenne observable** : elle justifie la simulation (Monte-Carlo), l'approximation d'une fonction (polynômes de Bernstein), et la prévision du **comportement typique** d'un processus multiplicatif, gouverné par $\mathbb{E}(\ln X)$ et non par $\mathbb{E}(X)$. Dans chaque problème, on identifie la moyenne empirique en jeu, sa variance, puis on dimensionne avec Tchebychev.

Exercice 1 – Estimer π par une grille

On tire n points (U_i, V_i) indépendants et uniformes dans le carré $[0,1]^2$, et l'on compte la proportion F_n de points tels que $U_i^2 + V_i^2 \leq 1$. On admet que la probabilité d'un tel point est l'aire du quart de disque, $\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que $4F_n \to \pi$ en probabilité.

b) Calculer $\mathrm{V}(4F_n)$.

c) Combien de points garantissent π à $\pm 0{,}01$ avec probabilité 0,95 ?

Exercice 2 – Compter les nombres premiers par sondage

On veut estimer le nombre P de nombres premiers inférieurs à $N = 10^6$ sans tous les tester. On tire $n = 10^4$ entiers $K_1, \dots, K_n$ uniformes dans $\{1, \dots, N\}$ (avec remise) et l'on estime P par $\hat{P} = N \times F$, où F est la proportion de premiers tirés.

a) Montrer que $\hat{P}$ est sans biais et converge vers P quand $n \to +\infty$.

b) Sachant que $P = 78\,498$, calculer l'écart type de $\hat{P}$.

c) Donner la marge de Tchebychev au niveau 95 %, en valeur absolue puis relative.

Exercice 3 – Simuler un temps d'attente

On veut vérifier par simulation que le nombre moyen de lancers d'une pièce équilibrée pour obtenir deux piles consécutifs vaut 6 (on sait que la variance vaut 22).

a) Écrire une fonction Python attente_pp() simulant une telle expérience, puis une fonction moyenne(N).

b) Combien de simulations garantissent, par Tchebychev, une moyenne à $\pm 0{,}1$ de 6 avec probabilité 0,95 ?

c) Trois exécutions avec ce nombre de simulations ont donné 5,986 ; 5,984 ; 5,994. Commenter.

Exercice 4 – Le théorème de Weierstrass par les probabilités

Soit f continue sur $[0,1]$, $M = \max|f|$, et $B_n f$ son polynôme de Bernstein.

a) Montrer que $|B_n f(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right]$ avec $S_n \sim B(n, x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donné par l'uniforme continuité de f. En découpant selon $\left\langle \left| \frac{S_n}{n} - x \right| < \delta \right\rangle$, montrer que $|B_n f(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$.

c) En déduire que $B_n f$ converge **uniformément** vers f sur $[0,1]$.

Exercice 5 – Bernstein pour la fonction carré

Soit $f(x) = x^2$ sur $[0,1]$.

a) Calculer exactement $B_n f(x) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^2\right]$ pour $S_n \sim B(n,x)$.

b) En déduire $\sup_{[0,1]} |B_n f - f|$.

c) Quel degré faut-il pour une erreur uniforme inférieure à 10^{-3} ? Commenter la vitesse.

Exercice 6 – Entropie et suites typiques

Une source émet des bits indépendants valant 1 avec probabilité $p = 0{,}1$. Pour une suite émise $(X_1, \dots, X_n)$, on note $\pi_n = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ évaluée en la suite observée.

a) Montrer que $-\frac{1}{n}\ln \pi_n = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{P}(X_i = x_i)$ converge en probabilité vers $H = -p\ln p - (1-p)\ln(1-p)$.

b) Calculer H (en nats).

c) En déduire qu'une suite émise de longueur 100 a, typiquement, une probabilité de l'ordre de e^{-100H}, et comparer le nombre de suites « typiques » ($\approx \mathrm{e}^{100H}$) au nombre total 2^{100}.

Exercice 7 – Un placement qui monte en moyenne et ruine presque sûrement

Chaque année, un capital est multiplié par 1,5 ou par 0,6 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. On part de $C_0 = 1$.

a) Calculer $\mathbb{E}(C_n)$.

b) Montrer que $\frac{1}{n}\ln C_n$ converge en probabilité vers une limite à calculer.

c) En déduire que $C_n \to 0$ en probabilité. Comparer $\mathbb{E}(C_{100})$ et la valeur typique $\mathrm{e}^{100\,\mathbb{E}(\ln R)}$.

Exercice 8 – Mutualiser les risques

Chaque assuré a, indépendamment, un sinistre de 10 000 € avec probabilité 0,01. L'assureur demande une prime $100 + c$ € par assuré (prime pure plus chargement c).

a) Calculer la variance σ^2 du coût d'un assuré.

b) Avec n assurés, majorer la probabilité que le coût moyen dépasse la prime.

c) Quel chargement garantit un risque d'au plus 1 % pour $n = 10^4$? pour $n = 10^6$?

Exercice 9 – Estimer 1/e en mélangeant des cartes

On mélange N fois un jeu de 52 cartes et l'on compte la proportion F des mélanges sans aucune carte à sa place d'origine. On admet que la probabilité d'un tel mélange

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

vaut $d_{52} \approx \mathrm{e}^{-1}$ (à 10^{-60} près).

a) Montrer que $\frac{1}{F} \to \mathrm{e}$ en probabilité.

b) Combien de mélanges garantissent F à $\pm 0{,}01$ de e^{-1} avec probabilité 0,95 ?

c) Pourquoi cette méthode est-elle une très mauvaise façon de calculer e ?

Exercice 10 – Variables antithétiques

On veut estimer $\theta = \mathbb{E}\left(D^2\right) = \frac{91}{6}$ pour un dé D par simulation.

a) Calculer $\mathrm{V}\left(D^2\right)$.

b) On utilise plutôt $Y = \frac{D^2 + (7-D)^2}{2}$. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \theta$ et calculer $\mathrm{V}(Y)$.

c) Avec n dés simulés, comparer la variance de la moyenne des n valeurs de D^2 et celle de la moyenne des n valeurs de Y. Quel est le gain ?

Exercice 11 – Précision relative pour une probabilité faible

On estime par simulation la probabilité p que la somme de 10 dés atteigne au moins 45. Un calcul exact (par les génératrices) donne $p \approx 0{,}039$.

a) Combien de simulations garantissent, par Tchebychev, une erreur relative de 10 % avec probabilité 0,95 ?

b) Même question pour la probabilité d'atteindre au moins 55, qui vaut $\frac{3\,003}{6^{10}} \approx 5{,}0 \times 10^{-5}$.

c) Conclure sur les limites de la simulation directe.

Exercice 12 – Le jeu de Saint-Pétersbourg plafonné

On lance une pièce jusqu'au premier pile, obtenu au lancer K ; le casino paie 2^K €, mais plafonne le gain à 2^{20} €. Soit $G = \min\left(2^K, 2^{20}\right)$.

a) Calculer $\mathbb{E}(G)$.

b) Calculer $\mathbb{E}\left(G^2\right)$ et $\mathrm{V}(G)$.

c) Combien de parties faut-il pour que, par Tchebychev, le gain moyen soit à ± 1 € de $\mathbb{E}(G)$ avec probabilité 0,95 ? Commenter.

Exercice 13 – Mesures répétées

Un appareil mesure une longueur ℓ avec une erreur aléatoire d'espérance nulle et d'écart type 0,5 mm ; les erreurs successives sont indépendantes.

a) Montrer que la moyenne de n mesures converge vers ℓ.

b) Combien de mesures garantissent $\pm 0{,}1$ mm avec probabilité 0,95 ?

c) L'appareil a en fait un biais systématique de $+0{,}2$ mm. Que mesure-t-on alors ?

Exercice 14 – Le volume d'une boule en dimension 10

On veut estimer la proportion p du cube $[-1, 1]^{10}$ occupée par la boule unité de $\mathbb{R}^{10}$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

qui vaut $p = \dfrac{\pi^5}{120 \times 2^{10}} \approx 0{,}002\,49$.

a) Méthode de grille : avec 10 points par axe, combien de points faut-il évaluer ?

b) Méthode de Monte-Carlo : combien de points uniformes garantissent une erreur relative de 10 % avec probabilité 0,95 (Tchebychev) ?

c) Commenter.

Exercice 15 – Synthèse : quelle fraction du capital miser ?

Un joueur dispose d'un capital $C_0 = 1$ et mise à chaque tour une fraction $f \in [0, 1[$ de son capital sur un pari gagné avec probabilité $p = 0{,}6$ (gain égal à la mise) : $C_{n+1} = C_n(1 + f)$ ou $C_n(1 - f)$.

a) Calculer $\mathbb{E}(C_n)$. Quelle fraction maximise l'espérance ?

b) Montrer que $\frac{1}{n}\ln C_n \to g(f) = p\ln(1+f) + q\ln(1-f)$ en probabilité.

c) Montrer que g est maximale pour $f^* = p - q$ et calculer $g(f^*)$.

d) Comparer, pour $n = 100$, le capital typique avec $f^* = 0{,}2$ et avec $f = 0{,}5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).