Plaquette 2 – Lois binomiale, hypergéométrique et multinomiale

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Binomiale $B(n,p)$: $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, et

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}$$

Hypergéométrique (n tirages sans remise parmi N boules dont K blanches) :
$\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, d'espérance $n\frac{K}{N}$.

Multinomiale (n épreuves à r issues de probabilités $p_1,\dots,p_r$) :
$\mathbb{P}(N_1=k_1,\dots,N_r=k_r)=\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$ si $\sum k_i=n$.

Indicatrices. $X=\sum_i 1_{A_i}$ donne $\mathbb{E}(X)=\sum_i\mathbb{P}(A_i)$ et $\mathrm{V}(X)=\sum_i\mathrm{V}(1_{A_i})+\sum_{i\neq j}\mathrm{Cov}(1_{A_i},1_{A_j})$.

Correction de l'exercice 1 – Mode de la loi binomiale

a) Le rapport vaut $\frac{(n-k)p}{(k+1)q}$, et
$(n-k)p\geq(k+1)(1-p)\Leftrightarrow np-kp\geq k+1-kp-p\Leftrightarrow k\leq(n+1)p-1$.

b) La suite $\mathbb{P}(X=k)$ croît tant que $k+1\leq(n+1)p$, puis décroît : le maximum est en $m=\lfloor(n+1)p\rfloor$ (et aussi en $m-1$ si $(n+1)p$ est entier).

c) $n=10$: $(n+1)p=3{,}3$, mode 3. $n=9$: $(n+1)p=3$ entier, donc

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=3)$$

deux modes, 2 et 3.

Réponse. Mode $\lfloor(n+1)p\rfloor$; 3 pour $B(10;0{,}3)$, 2 et 3 pour $B(9;0{,}3)$.

Correction de l'exercice 2 – Symétrie et parité de la binomiale

a) $\mathbb{P}(n-X=k)=\binom{n}{n-k}p^{n-k}q^k=\binom{n}{k}q^k p^{n-k}$: $n-X$ compte les échecs.

b) $(q+p)^n+(q-p)^n=2\sum_{k\text{ pair}}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, avec $q+p=1$ et $q-p=1-2p$:

$$\mathbb{P}(X\text{ pair})=\frac{1+(1-2p)^n}{2}$$

c) Pour $p=\frac{1}{2}$ uniquement, seule valeur annulant $(1-2p)^n$. Pour $0<p<1$, $|1-2p|<1$ et la probabilité tend vers $\frac{1}{2}$.

Réponse. $n-X\sim B(n,q)$; $\mathbb{P}(X\text{ pair})=\frac{1+(1-2p)^n}{2}\to\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – QCM répondu au hasard

a) $X\sim B\left(20,\frac{1}{4}\right)$: $\mathbb{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=20\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$ et $\mathbb{P}(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\approx 0{,}0032$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) La note vaut $X - \frac{1}{3}(20 - X) = \frac{4}{3}X - \frac{20}{3}$, d'espérance

$$\frac{4}{3} \cdot 5 - \frac{20}{3} = 0$$

c) Pour chaque question, l'espérance du gain au hasard est $\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = 0$: répondre au hasard ne rapporte rien en moyenne, mais une connaissance partielle (éliminer une réponse) devient rentable.

Réponse. $X \sim B(20, \frac{1}{4})$, $\mathbb{E}(X) = 5$; note moyenne nulle avec le barème $+1$ / $-\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 4 – Contrôle d'un lot sans remise

a) Loi hypergéométrique : $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{4}{k}\binom{46}{5-k}}{\binom{50}{5}}$.

b) $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46} = \dfrac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} \approx 0{,}647$.

c) $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{4\binom{46}{4}}{\binom{50}{5}} = \dfrac{4 \times 163\,185}{2\,118\,760} \approx 0{,}308$, donc

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - 0{,}647 - 0{,}308 \approx 0{,}045$$

Réponse. Loi hypergéométrique ; acceptation $\approx 0{,}647$; $\mathbb{P}(X \geq 2) \approx 0{,}045$.

Correction de l'exercice 5 – Capture-recapture

a) Loi hypergéométrique : $L(N) = \dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

b) Après simplification des coefficients binomiaux :

$$\frac{L(N)}{L(N-1)} = \frac{(N-m)(N-n)}{N(N-m-n+k)}$$

et $(N-m)(N-n) \geq N(N-m-n+k) \Leftrightarrow mn \geq Nk$.

c) L croît jusqu'à $\left\lfloor \frac{mn}{k} \right\rfloor$ puis décroît : estimation $\hat{N} = \frac{100 \times 50}{5} = 1000$ poissons (la proportion de marqués dans l'échantillon, $\frac{1}{10}$, égale celle du lac).

Réponse. $\frac{L(N)}{L(N-1)} = \frac{(N-m)(N-n)}{N(N-m-n+k)}$; estimation $\hat{N} = \frac{mn}{k} = 1000$.

Correction de l'exercice 6 – Espérance et variance de la loi hypergéométrique

a) Par symétrie, le i-ième tirage a la même loi que le premier ; de même la paire (i, j) a la loi de la paire $(1, 2)$.

b) $X = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$, d'où $\mathbb{E}(X) = np$.

c) $\mathrm{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = \frac{p(Np-1)}{N-1} - p^2 = -\frac{p(1-p)}{N-1}$. Donc

$$\mathrm{V}(X) = np(1-p) - n(n-1)\frac{p(1-p)}{N-1} = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

plus petite que la variance binomiale $np(1-p)$; elle est nulle pour $n = N$ (on tire toute l'urne).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathrm{V}(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} \le np(1-p)$.

Correction de l'exercice 7 – Calcul récursif d'une loi binomiale

a) $\mathbb{P}(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.

b) Ici $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$. Les numérateurs sur 243 sont successivement :

$$32,\quad 32\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 80,\quad 80\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{2} = 80,\quad 80\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2} = 40,\quad 40\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2} = 10,\quad 10\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

c) $32+80+80+40+10+1 = 243$ ✓. Deux modes, 1 et 2, conformément à $(n+1)p = 2$ entier.

Réponse. Loi $\frac{1}{243}(32, 80, 80, 40, 10, 1)$; modes 1 et 2.

Correction de l'exercice 8 – Nombre de lancers pour être presque sûr

a) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

b) $\left(\frac{5}{6}\right)^n \le 0{,}01 \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 100}{\ln(6/5)} \approx \frac{4{,}605}{0{,}1823} \approx 25{,}3$, soit

$$n \ge 26$$

c) $(1-p)^n \le \alpha \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(1/\alpha)}{-\ln(1-p)}$, et $-\ln(1-p) \sim p$ quand $p \to 0$. Pour $\alpha = 0{,}01$, il faut environ $\frac{4{,}6}{p}$ essais (« règle des trois » pour $\alpha = 0{,}05$: $\frac{3}{p}$).

Réponse. $1 - (\frac{5}{6})^n$; 26 lancers ; environ $\frac{\ln(1/\alpha)}{p}$ en général.

Correction de l'exercice 9 – La loi multinomiale

a) Choix des positions et probabilités : $\frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2 = 90\cdot\frac{16}{46\,656} = \frac{5}{162} \approx 0{,}031$.

b) $N_1 \sim B\left(6, \frac{1}{6}\right)$ (on regroupe les autres issues), et $N_1 + N_2 \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$.

c) Non : $\mathbb{P}(N_1 = 6, N_2 = 6) = 0$ alors que

$$\mathbb{P}(N_1 = 6)\mathbb{P}(N_2 = 6) = \frac{1}{6^{12}} > 0$$

(les comptes se partagent les 6 lancers).

Réponse. $\mathbb{P} = \frac{5}{162}$; $N_1 \sim B(6, \frac{1}{6})$, $N_1 + N_2 \sim B(6, \frac{1}{3})$; non indépendantes.

Correction de l'exercice 10 – Série au meilleur des sept matchs

a) Le dernier match est gagné par A, et parmi les $3+k$ précédents, A en gagne 3 et en perd k.

b) $p^4 = 0{,}1296$ et $1 + 4\cdot 0{,}4 + 10\cdot 0{,}16 + 20\cdot 0{,}064 = 5{,}48$, soit

$$\mathbb{P}(A \text{ gagne}) \approx 0{,}710$$

c) Si l'on fait jouer les 7 matchs même quand la série est décidée, A gagne la série si et seulement s'il gagne au moins 4 des 7 matchs :
$\sum_{k=4}^{7}\binom{7}{k}0{,}6^k 0{,}4^{7-k} \approx 0{,}290 + 0{,}261 + 0{,}131 + 0{,}028 \approx 0{,}710$ ✓.

Réponse. $\mathbb{P}(A \text{ gagne}) = \sum_{k=0}^{3}\binom{3+k}{k}p^4 q^k = \mathbb{P}(B(7,p) \ge 4) \approx 0{,}710$ pour $p = 0{,}6$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Monotonie de la binomiale en p

a) En dérivant $\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$ et en utilisant $j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}$, $(n-j)\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j}$:

$$F'(p) = n\sum_{j\geq k}\left(\binom{n-1}{j-1}p^{j-1}q^{n-j} - \binom{n-1}{j}p^j q^{n-1-j}\right)$$

somme télescopique dont il ne reste que le premier terme.

b) $F' \geq 0$.

c) Plus chaque épreuve réussit facilement, plus on a de chances d'obtenir au moins k succès. Comme $F(0) = 0$ ($k \geq 1$), l'intégration de F' donne la formule.

Réponse. $F'(p) = n\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \geq 0$; $\mathbb{P}(X_p \geq k)$ croît avec p.

Correction de l'exercice 12 – Égalité de deux binomiales

a) $\mathbb{P}(X=Y) = \sum_k \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k) = \sum_k \binom{n}{k}^2 \frac{1}{4^n}$.

b) $\sum_k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$.

c) $X + (n-Y)$ est somme de deux $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ indépendantes, donc suit $B\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, et

$$\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}(X+n-Y=n) = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}$$

Réponse. $\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Correction de l'exercice 13 – Tirages avec ou sans remise

a) $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$: $\mathbb{P}(X=k) = \binom{3}{k}\frac{3^k 2^{3-k}}{125}$, soit $\frac{8}{125}, \frac{36}{125}, \frac{54}{125}, \frac{27}{125}$.

b) $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$ pour $k \in \{1,2,3\}$: $\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{1}{10}$.

c) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{9}{5}$; $\mathrm{V}(X) = 3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{18}{25}$ et

$$\mathrm{V}(Y) = \frac{18}{25}\cdot\frac{5-3}{5-1} = \frac{9}{25}$$

Sans remise, la composition de l'échantillon est plus « contrainte » : même moyenne, dispersion moindre.

Réponse. $X \sim B(3, \frac{3}{5})$, Y hypergéométrique ; même espérance $\frac{9}{5}$, variances $\frac{18}{25}$ et $\frac{9}{25}$.

Correction de l'exercice 14 – Réussite d'un examen à épreuves multiples

a) $X \sim B(10; 0{,}8)$:
$\mathbb{P}(X \geq 8) = \binom{10}{8}0{,}8^8 0{,}2^2 + \binom{10}{9}0{,}8^9 0{,}2 + 0{,}8^{10} \approx 0{,}302 + 0{,}268 + 0{,}107 = 0{,}678.$

b) Une épreuve est échouée deux fois avec probabilité $0{,}2^2 = 0{,}04$; les épreuves restent indépendantes.

c) Le nombre d'épreuves réussies suit $B(10; 0{,}96)$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(\geq 8) = \binom{10}{8}0{,}96^8 0{,}04^2 + 10 \cdot 0{,}96^9 \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{10} \approx 0{,}052 + 0{,}277 + 0{,}665 = 0{,}994$$

Réponse. Reçu avec probabilité $\approx 0{,}678$, et $\approx 0{,}994$ avec rattrapage.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : courbe d’efficacité d’un plan de contrôle

a) Le nombre de défauts suit $B(20, \theta)$, et l’on somme les probabilités de 0 et 1 défaut.

b) $L'(\theta) = -20(1-\theta)^{19} + 20(1-\theta)^{19} - 380\theta(1-\theta)^{18} = -380\theta(1-\theta)^{18} < 0$ sur $]0,1[$.

c) $L(0{,}01) = 0{,}99^{20} + 0{,}2 \cdot 0{,}99^{19} \approx 0{,}818 + 0{,}165 = 0{,}983$ et

$$L(0{,}1) = 0{,}9^{20} + 2 \cdot 0{,}9^{19} \approx 0{,}122 + 0{,}270 = 0{,}392$$

Un bon lot (1 %) est refusé dans moins de 2 % des cas (risque du fournisseur), mais un mauvais lot (10 %) est encore accepté près de 4 fois sur 10 (risque du client) : il faudrait un échantillon plus grand.

Réponse. L décroissante ; $L(0{,}01) \approx 0{,}983$, $L(0{,}1) \approx 0{,}392$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).