Plaquette 3 – Lois géométrique, de Pascal et de Poisson

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Géométrique $G(p)$: $\mathbb{P}(X>n)=q^n$, $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p^2}$, et pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X>n)$$

Pascal (rang du r-ième succès) : $\mathbb{P}(T_r=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r q^{n-r}$ pour $n\geq r$.

Série binomiale négative. Pour $|x|<1$: $\sum_{k\geq 0}\binom{k+r-1}{k}x^k=\frac{1}{(1-x)^r}$.

Poisson $P(\lambda)$: $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\frac{\lambda}{k+1}$, $\mathbb{E}(X)=\mathrm{V}(X)=\lambda$.

Correction de l'exercice 1 – Mode de la loi de Poisson

a) Le rapport vaut $\frac{\lambda}{k+1}$: $\mathbb{P}(X=k+1)\geq\mathbb{P}(X=k)\Leftrightarrow k\leq\lambda-1$.

b) La loi croît jusqu'à $\lfloor\lambda\rfloor$ puis décroît : mode $\lfloor\lambda\rfloor$, et aussi $\lambda-1$ si λ est entier.

c) $\lambda=3{,}5$: mode 3. $\lambda=3$: modes 2 et 3, avec

$$\mathbb{P}(X=2)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-3}\approx 0{,}224$$

Réponse. Mode $\lfloor\lambda\rfloor$ (et $\lambda-1$ si λ entier) ; pour $\lambda=3$: $\frac{9}{2}\mathrm{e}^{-3}\approx 0{,}224$.

Correction de l'exercice 2 – Rang du r-ième succès

a) L'épreuve n est un succès, et parmi les $n-1$ précédentes exactement $r-1$ le sont.

b) Les temps d'attente entre succès successifs sont indépendants et de loi $G(p)$. Donc

$$\mathbb{E}(T_r)=\frac{r}{p},\qquad \mathrm{V}(T_r)=\frac{rq}{p^2}$$

c) $\mathbb{E}(T_3)=18$ lancers. $\mathbb{P}(T_3=3)=\frac{1}{216}$ et $\mathbb{P}(T_3=5)=\binom{4}{2}\frac{1}{6^3}\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{6\times 25}{7776}\approx 0{,}019$.

Réponse. $\mathbb{P}(T_r=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r q^{n-r}$, $\mathbb{E}(T_r)=\frac{r}{p}$; 18 lancers en moyenne pour trois 6.

Correction de l'exercice 3 – Nombre d'échecs avant le r-ième succès

a) $\mathbb{P}(F=k)=\mathbb{P}(T_r=k+r)=\binom{k+r-1}{r-1}p^r q^k=\binom{k+r-1}{k}p^r q^k$ pour $k\geq 0$.

b) $\sum_{k\geq 0}\binom{k+r-1}{k}q^k=\frac{1}{(1-q)^r}=\frac{1}{p^r}$, donc

$$\sum_k \mathbb{P}(F=k)=p^r\cdot\frac{1}{p^r}=1$$

c) $\mathbb{P}(F=k)=pq^k$: loi géométrique « sur $\mathbb{N}$ » (nombre d'échecs avant le premier succès), c'est-à-dire $F+1\sim G(p)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathbb{P}(F=k)=\binom{k+r-1}{k}p^r q^k$ (loi binomiale négative) ; pour $r=1$: pq^k.

Correction de l'exercice 4 – Espérance par la queue de la loi

a) $\sum_{n\geq 0}\sum_{k>n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k\geq 1}\sum_{n=0}^{k-1}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k}k\mathbb{P}(X=k)$ (famille positive : interversion licite).

b) $\mathbb{E}(X)=\sum_{n\geq 0}q^n=\frac{1}{p}$.

c) Le nombre de lancers est $Y=\min(X,4)$ avec $X\sim G\left(\frac{1}{3}\right)$; $\mathbb{P}(Y>n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour $n\leq 3$ et 0 ensuite :

$$\mathbb{E}(Y)=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{65}{27}\approx 2{,}41$$

Réponse. $\mathbb{E}(X)=\sum\mathbb{P}(X>n)$; géométrique : $\frac{1}{p}$; ici $\frac{65}{27}$.

Correction de l'exercice 5 – Moments factoriels de la loi de Poisson

a) Par le théorème de transfert, les termes $k<j$ étant nuls :

$$\sum_{k\geq j}\frac{k!}{(k-j)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^j\sum_{k\geq j}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-j}}{(k-j)!}=\lambda^j$$

b) $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X(X-1))+\mathbb{E}(X)=\lambda^2+\lambda$, d'où $\mathrm{V}(X)=\lambda$.

c) $X^3=X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X$, donc $\mathbb{E}(X^3)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda$.

Réponse. $\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-j+1))=\lambda^j$; $\mathrm{V}(X)=\lambda$; $\mathbb{E}(X^3)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda$.

Correction de l'exercice 6 – Estimer le paramètre d'une loi de Poisson

a) La dérivée vaut $\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{k!}(k-\lambda)$: croissance jusqu'à k, puis décroissance (estimation par maximum de vraisemblance).

b) $\mathrm{e}^{-\lambda}=0{,}3$, d'où $\lambda=\ln\frac{10}{3}\approx 1{,}204$.

c) $\mathbb{P}(X\geq 2)=1-\mathrm{e}^{-\lambda}(1+\lambda)$, soit

$$1-0{,}3\times 2{,}204\approx 0{,}339$$

environ un tiers des pages.

Réponse. Maximum en $\lambda=k$; $\lambda=\ln\frac{10}{3}\approx 1{,}204$; ≈ 34 % des pages ont au moins deux fautes.

Correction de l'exercice 7 – Fautes de frappe dans un livre

a) $X\sim B\left(300,\frac{1}{500}\right)$, approchée par $P(0{,}6)$ (n grand, p petit, $np=0{,}6$).

b) $\mathbb{P}(X=0)\approx\mathrm{e}^{-0{,}6}\approx 0{,}549$ et

$$\mathbb{P}(X\geq 2)\approx 1-\mathrm{e}^{-0{,}6}(1+0{,}6)\approx 0{,}122$$

c) Par linéarité de l'espérance (somme des indicatrices des pages), environ $500\times 0{,}549\approx 274$ pages sans faute.

Réponse. $X\approx P(0{,}6)$; $\mathbb{P}(X=0)\approx 0{,}549$, $\mathbb{P}(X\geq 2)\approx 0{,}122$; ≈ 274 pages sans faute.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 8 – Appels à un standard

a) $\mathbb{P}(X=0)=\mathrm{e}^{-4}\approx 0{,}018$ et $\mathbb{P}(X\le 2)=\mathrm{e}^{-4}(1+4+8)=13\mathrm{e}^{-4}\approx 0{,}238$.

b) $\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}135$ (cohérent : deux demi-heures indépendantes sans appel donnent e^{-4}).

c) $\mathbb{P}(X\ge 7)=1-\mathrm{e}^{-4}\sum_{k=0}^{6}\frac{4^k}{k!}$ avec

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{4^k}{k!}=1+4+8+\frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{128}{15}+\frac{256}{45}\approx 48{,}56$$

soit $\mathbb{P}(X\ge 7)\approx 1-0{,}889=0{,}111$.

Réponse. $\mathrm{e}^{-4}\approx 0{,}018$; $13\mathrm{e}^{-4}\approx 0{,}238$; $\mathrm{e}^{-2}\approx 0{,}135$; saturation $\approx 0{,}111$.

Correction de l’exercice 9 – Course entre deux géométriques

a) $\mathbb{P}(X>Y)=\sum_{k\ge 1}\mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k} r(1-r)^{k-1}(1-p)^{k}$, série géométrique de raison $(1-p)(1-r)$.

b) Par symétrie des rôles, $\mathbb{P}(X<Y)=\dfrac{p(1-r)}{1-(1-p)(1-r)}$, et

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k} pr\big((1-p)(1-r)\big)^{k-1}=\frac{pr}{1-(1-p)(1-r)}$$

c) Le dénominateur vaut $\frac{2}{3}$: $\mathbb{P}(X>Y)=\frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{4}$ (somme 1 ✓). Le joueur à la pièce la plus favorable finit strictement le premier une fois sur deux.

Réponse. $\mathbb{P}(X>Y)=\dfrac{r(1-p)}{1-(1-p)(1-r)}$; pour $p=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{3}$: $\mathbb{P}(X>Y)=\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X<Y)=\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 10 – Loi de Poisson conditionnée

a) $\mathbb{P}(X=k\mid X\ge 1)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}$ pour $k\ge 1$.

b) $\mathbb{E}(X\mid X\ge 1)=\dfrac{\mathbb{E}(X)}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}=\dfrac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

c) On résout $\dfrac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}=1{,}5$. La fonction $g(\lambda)=\dfrac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, tend vers 1 en 0 et vers $+\infty$:

$$\exists \lambda>0,\quad g(\lambda)=1{,}5$$

(numériquement $\lambda\approx 0{,}87$).

Réponse. Loi $\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!(1-\mathrm{e}^{-\lambda})}$, d’espérance $\dfrac{\lambda}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$; ici $\lambda\approx 0{,}87$.

Correction de l’exercice 11 – Nombre d’essais limité

a) $Y=\min(X,n)$ avec $X\sim G(p)$: $\mathbb{P}(Y=k)=q^{k-1}p$ pour $k<n$ et $\mathbb{P}(Y=n)=q^{n-1}$.

b) $\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(Y>k)=\sum_{k=0}^{n-1}q^{k}=\dfrac{1-q^{n}}{p}$.

c) Réussite : $1-0{,}6^{3}=0{,}784$. Et

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1-0{,}216}{0{,}4}=1{,}96$$

Réponse. $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{1-q^{n}}{p}$; ici réussite $0{,}784$ et $\mathbb{E}(Y)=1{,}96$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Majoration de l'erreur d'approximation

a) $1-p \le \mathrm{e}^{-p}$, à la puissance n.

b) $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} \le n(a-b)$. Avec $a = \mathrm{e}^{-p}$, $b = 1-p$, et $\mathrm{e}^{-p} \le 1 - p + \frac{p^2}{2}$ (pour $p \ge 0$) :

$$\mathrm{e}^{-np} - (1-p)^n \le n(\mathrm{e}^{-p} - (1-p)) \le \frac{np^2}{2}$$

c) Borne : $\frac{100 \times 0{,}0004}{2} = 0{,}02$. Erreur réelle : $\mathrm{e}^{-2} - 0{,}98^{100} \approx 0{,}1353 - 0{,}1326 = 0{,}0027$. La borne est grossière mais montre que l'erreur tend vers 0 quand $np^2 \to 0$.

Réponse. $0 \le \mathrm{e}^{-np} - (1-p)^n \le \frac{np^2}{2}$; ici borne 0,02, erreur 0,0027.

Correction de l'exercice 13 – Poisson ou binomiale : un choix de modèle

a) $A \sim B(102; 0{,}03)$, approchée par $P(3{,}06)$.

b) Exactement : $0{,}97^{102} + 102 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{101} \approx 0{,}0447 + 0{,}1411 = 0{,}186$.
Approximation :

$$\mathrm{e}^{-3{,}06}(1 + 3{,}06) \approx 0{,}0469 \times 4{,}06 \approx 0{,}190$$

c) Pour $100 + m$ billets, surréservation si $A < m$, avec $A \approx P(0{,}03(100+m))$. Pour $m = 1$: $\mathbb{P}(A = 0) \approx \mathrm{e}^{-3{,}03} \approx 0{,}048 < 0{,}05$. Pour $m = 2$, on vient de voir 0,19. Il faut donc vendre au plus 101 billets.

Réponse. $A \approx P(3{,}06)$; surréservation $\approx 0{,}19$; au plus 101 billets pour rester sous 5 %.

Correction de l'exercice 14 – Somme de géométriques indépendantes

a) $\mathbb{P}(S_{r+1} = n) = \sum_{j=r}^{n-1} \binom{j-1}{r-1} p^r q^{j-r} \cdot pq^{n-j-1} = p^{r+1} q^{n-r-1} \sum_{j=r}^{n-1} \binom{j-1}{r-1}$, et la somme vaut $\binom{n-1}{r}$ (formule de sommation sur une colonne du triangle de Pascal).

b) $S_r > n$ signifie que le r-ième succès n'a pas encore eu lieu après n épreuves, c'est-à-dire qu'il y a moins de r succès parmi les n premières :

$$\mathbb{P}(S_r > n) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

c) $\mathbb{P}(S_2 > 4) = \frac{1}{16}(1+4) = \frac{5}{16}$.

Réponse. S_r suit la loi de Pascal ; $\mathbb{P}(S_r > n) = \mathbb{P}(B(n,p) < r)$; ici $\frac{5}{16}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : clients minute par minute

a) Par stabilité de la loi de Poisson, $S_m \sim P(m\lambda)$.

b) Chaque minute contient au moins un client avec probabilité $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$, indépendamment : $T \sim G(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$.

c) X_1 et $X_2 + \cdots + X_m \sim P((m-1)\lambda)$ sont indépendantes, d'où

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid S_m = n) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-(m-1)\lambda}\frac{((m-1)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}}{\mathrm{e}^{-m\lambda}\frac{(m\lambda)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

Sachant le total, chaque client a choisi sa minute uniformément et indépendamment :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$X_1 \sim B\left(n, \frac{1}{m}\right)$, quel que soit le débit λ.

Réponse. $S_m \sim P(m\lambda)$, $T \sim G(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$; sachant $S_m = n$, $X_1 \sim B(n, \frac{1}{m})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).