# Plaquette 4 – Lois images, mélanges et lois conditionnelles

## Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Loi image.** $\mathbb{P}(f(X)=y)=\sum_{x:f(x)=y}\mathbb{P}(X=x)$.

**Mélange.** Si $(N=n)_n$ est un système complet :
$\mathbb{P}(X=k)=\sum_n \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(X=k\mid N=n)$.

**Extrêmes de variables indépendantes.**

$$\mathbb{P}(\min(X,Y)\geq k)=\mathbb{P}(X\geq k)\mathbb{P}(Y\geq k),\qquad \mathbb{P}(\max(X,Y)\leq k)=\mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k)$$

**Conditionnement par un événement.** $\mathbb{P}(X=k\mid A)=\dfrac{\mathbb{P}((X=k)\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$, et $\mathbb{E}(X\mid A)=\dfrac{\mathbb{E}(X1_A)}{\mathbb{P}(A)}$.

## Correction de l'exercice 1 – Reste modulo m d'une géométrique

a) $\mathbb{P}(X\equiv j\ [m])=\sum_{t\geq 0} q^{j-1+tm}p=\dfrac{q^{j-1}p}{1-q^m}$.

b) $\sum_{j=1}^{m}\dfrac{q^{j-1}p}{1-q^m}=\dfrac{p}{1-q^m}\cdot\dfrac{1-q^m}{1-q}=1$. La loi est décroissante en $j$ : la valeur la plus probable est $j=1$.

c) Quand $p\to 0$, $\dfrac{q^{j-1}p}{1-q^m}\sim\dfrac{p}{mp}$, donc

$$\mathbb{P}(X\equiv j\ [m])\underset{p\to 0}{\longrightarrow}\frac{1}{m}$$

Un temps d'attente très long « oublie » sa position modulo $m$ : le reste devient uniforme.

**Réponse.** $\mathbb{P}(X\equiv j\ [m])=\dfrac{q^{j-1}p}{1-q^m}$, qui tend vers la loi uniforme quand $p\to 0$.

## Correction de l'exercice 2 – Quotient et reste d'une géométrique

a) $\mathbb{P}(A=a,B=b)=\mathbb{P}(X=2a+b)=pq^{2a+b}$.

b) $\mathbb{P}(A=a)=pq^{2a}(1+q)=(1-q^2)(q^2)^a$ : loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1-q^2$.
$\mathbb{P}(B=1)=\sum_a pq^{2a+1}=\dfrac{pq}{1-q^2}=\dfrac{q}{1+q}$.

c) On vérifie la factorisation :

$$\mathbb{P}(A=a)\mathbb{P}(B=b)=(1-q^2)q^{2a}\cdot\frac{q^b}{1+q}=pq^{2a+b}$$

**Réponse.** $A$ géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1-q^2$, $B\sim B(\frac{q}{1+q})$, indépendantes.

## Correction de l'exercice 3 – Valeur absolue et signe

a) $|X|$ est uniforme sur $\{1,2\}$, $\mathrm{sgn}(X)$ uniforme sur $\{-1,1\}$, et chacun des 4 couples a probabilité $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

b) $\mathbb{P}(|X|=0,\mathrm{sgn}X=1)=0$ alors que $\mathbb{P}(|X|=0)\mathbb{P}(\mathrm{sgn}X=1)=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}$ : non indépendantes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $x^2 - x$ vaut 6, 2, 0, 2 pour $x = -2, -1, 1, 2$ :

$$\mathbb{P}(X^2 - X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X^2 - X = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X^2 - X = 6) = \frac{1}{4}$$

**Réponse.** a) Indépendantes ; b) non ; c) $X^2 - X$ vaut 0, 2, 6 avec probabilités $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

## Correction de l'exercice 4 – Un entier au hasard entre 1 et le résultat d'un dé

a) Probabilités totales : $\mathbb{P}(X = k \mid N = n) = \frac{1}{n}$ si $k \le n$, 0 sinon.

b) $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{20} = \frac{49}{120} \approx 0{,}408$ et $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{36}$.

c) Sachant $N = n$, l'espérance est $\frac{n+1}{2}$, d'où

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n} \frac{1}{6} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{\mathbb{E}(N) + 1}{2} = \frac{9}{4}$$

**Réponse.** $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{49}{120}$, $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{E}(X) = \frac{9}{4}$.

## Correction de l'exercice 5 – Minimum de deux uniformes

a) $\mathbb{P}(U \ge k) = \mathbb{P}(X \ge k)\mathbb{P}(Y \ge k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$.

b) $\mathbb{P}(U = k) = \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{2n - 2k + 1}{n^2}$, et $\sum_{k=1}^{n} (2(n-k)+1)$ est la somme des $n$ premiers impairs, égale à $n^2$.

c) $n = 6$ :

$$\mathbb{P}(U = 1) = \frac{11}{36}, \qquad \mathbb{P}(U = 6) = \frac{1}{36}$$

**Réponse.** $\mathbb{P}(U = k) = \frac{2n - 2k + 1}{n^2}$ ; pour deux dés : $\frac{11}{36}$ et $\frac{1}{36}$.

## Correction de l'exercice 6 – Somme modulo n et masque jetable

a) $\mathbb{P}(Z = z) = \sum_y \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(X = z - y) = \sum_y \mathbb{P}(Y = y) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

b) Le même calcul donne

$$\mathbb{P}(Z = z, Y = y) = \mathbb{P}(Y = y) \cdot \frac{1}{n} = \mathbb{P}(Y = y)\mathbb{P}(Z = z)$$

c) Le message chiffré est uniforme et indépendant du message : un espion qui l'intercepte n'apprend rien sur $Y$ (c'est le « masque jetable » de Vernam, à condition de ne jamais réutiliser la clé).

**Réponse.** $Z$ est uniforme et indépendante de $Y$ : le chiffrement par masque jetable ne révèle rien.

## Correction de l'exercice 7 – Écart entre deux uniformes

a) $\mathbb{P}(D = 0) = \frac{1}{n}$ et, pour $1 \le k \le n - 1$, les couples $(i, i + k)$ et $(i + k, i)$ avec $1 \le i \le n - k$ donnent $\mathbb{P}(D = k) = \frac{2(n-k)}{n^2}$.

b) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1$.

c) $n = 6$ : $\mathbb{P}(D = 0) = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(D = 1) = \frac{10}{36}$ (le mode), $\mathbb{P}(D = 2) = \frac{8}{36}$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(D \geq 3) = \frac{6+4+2}{36} = \frac{1}{3}$$

**Réponse.** $\mathbb{P}(D=k) = \dfrac{2(n-k)}{n^2}$ $(k \geq 1)$, $\frac{1}{n}$ pour $k=0$ ; deux dés : mode 1, $\mathbb{P}(D \geq 3) = \frac{1}{3}$.

## Correction de l'exercice 8 – Position d'une marche aléatoire

a) $S_n = B_n - (n - B_n) = 2B_n - n$ avec $B_n \sim B(n,p)$ : $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}$ si $n+k$ est pair et $|k| \leq n$, 0 sinon.

b) $\mathbb{E}(S_n) = 2np - n = n(p-q)$ et $\mathrm{V}(S_n) = 4npq$.

c) $S_4 \in \{-4,-2,0,2,4\}$ avec

$$\mathbb{P}(S_4 = -4,-2,0,2,4) = \frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$$

**Réponse.** $S_n = 2B_n - n$, $\mathbb{E}(S_n) = n(p-q)$, $\mathrm{V}(S_n) = 4npq$ ; $S_4 : \frac{1}{16}(1,4,6,4,1)$.

## Correction de l'exercice 9 – Géométrique conditionnée à être paire

a) $\sum_{k \geq 1} q^{2k-1} p = \dfrac{pq}{1-q^2} = \dfrac{q}{1+q}$.

b) $\mathbb{P}\left(\frac{X}{2} = k \mid X \text{ pair}\right) = \dfrac{q^{2k-1}p}{q/(1+q)} = q^{2k-2}p(1+q) = (q^2)^{k-1}(1-q^2)$.

c) $\mathbb{E}(X \mid X \text{ pair}) = \dfrac{2}{1-q^2}$. Pour $p = \frac{1}{2}$ :

$$\mathbb{E}(X \mid X \text{ pair}) = \frac{2}{3/4} = \frac{8}{3} > 2 = \mathbb{E}(X)$$

(la valeur 1, la plus probable, est exclue).

**Réponse.** $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \frac{q}{1+q}$ ; $\frac{X}{2} \mid X \text{ pair} \sim G(1-q^2)$ ; espérance $\frac{2}{1-q^2}$ ($\frac{8}{3}$ pour $p = \frac{1}{2}$).

## Correction de l'exercice 10 – Rang de la première blanche sans remise

a) Les $k$ premières boules sont noires : $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n+2}{k}} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+2)(n+1)\cdots(n-k+3)}$, qui se simplifie en la formule annoncée.

b) $\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k) = \dfrac{(n-k+2)((n-k+3)-(n-k+1))}{(n+1)(n+2)}$.

c) Avec $j = n-k+1$ :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T > k) = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} j(j+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+3}{3}$$

Les deux blanches découpent en moyenne les $n$ noires en trois paquets égaux.

**Réponse.** $\mathbb{P}(T=k) = \dfrac{2(n-k+2)}{(n+1)(n+2)}$, $\mathbb{E}(T) = \dfrac{n+3}{3}$.

## Correction de l'exercice 11 – Nombre de valeurs distinctes de trois dés

a) $\mathbb{P}(D=1) = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$ et $\mathbb{P}(D=3) = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{216} = \dfrac{5}{9}$.

b) $1 - \frac{6}{216} - \frac{120}{216} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$ ; directement : valeur doublée (6), valeur isolée (5), position de l'isolée (3), soit 90 issues.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\mathbb{E}(D) = \frac{6 + 2\cdot 90 + 3\cdot 120}{216} = \frac{546}{216} = \frac{91}{36}$. Avec les indicatrices :

$$\mathbb{E}(D) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3\right) = 6\cdot\frac{91}{216} = \frac{91}{36}$$

**Réponse.** $\mathbb{P}(D = 1, 2, 3) = \frac{1}{36}, \frac{5}{12}, \frac{5}{9}$ ; $\mathbb{E}(D) = \frac{91}{36}$.

## Correction de l'exercice 12 – Minimum sachant le maximum

a) $\mathbb{P}(M = 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$.

b) $\mathbb{P}(U = k, M = 6) = \frac{2}{36}$ pour $k \le 5$ (deux ordres) et $\frac{1}{36}$ pour $k = 6$ : sachant $M = 6$, $U$ vaut $k \le 5$ avec probabilité $\frac{2}{11}$ et 6 avec probabilité $\frac{1}{11}$.

c) $\mathbb{E}(U \mid M = 6) = \frac{2(1+2+3+4+5)+6}{11} = \frac{36}{11} \approx 3{,}27$. Par l'exercice « Minimum de deux uniformes », $\mathbb{E}(U) = \sum_k \mathbb{P}(U \ge k) = \frac{36+25+16+9+4+1}{36}$, soit

$$\mathbb{E}(U) = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$$

Savoir qu'un dé a fait 6 rend l'autre « libre », et augmente le minimum attendu.

**Réponse.** $\mathbb{P}(M = 6) = \frac{11}{36}$ ; $U \mid M = 6$ : $\frac{2}{11}$ pour $k \le 5$, $\frac{1}{11}$ pour 6 ; $\mathbb{E}(U \mid M = 6) = \frac{36}{11}$.

## Correction de l'exercice 13 – Binomiale sachant au moins un succès

a) $\mathbb{P}(X = k \mid X \ge 1) = \dfrac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}$ pour $1 \le k \le n$.

b) $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{X \ge 1}) = \mathbb{E}(X) = np$, que l'on divise par $\mathbb{P}(X \ge 1) = 1 - q^n$.

c) $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ :

$$\mathbb{E}(X \mid X \ge 1) = \frac{3/2}{7/8} = \frac{12}{7} \approx 1{,}71$$

**Réponse.** $\mathbb{E}(X \mid X \ge 1) = \frac{np}{1 - q^n}$ ; $\frac{12}{7}$ filles en moyenne.

## Correction de l'exercice 14 – La médiane de trois dés

a) Le nombre de dés $\le k$ suit $B(3, a)$, et $M \le k$ si et seulement s'il vaut au moins 2 : $3a^2(1-a) + a^3 = 3a^2 - 2a^3$.

b) $\mathbb{P}(M \le 1) = \frac{16}{216}$, $\mathbb{P}(M \le 2) = \frac{7}{27}$, $\mathbb{P}(M \le 3) = \frac{1}{2}$, d'où

$$\mathbb{P}(M = 1, \dots, 6) = \frac{2}{27}, \frac{5}{27}, \frac{13}{54}, \frac{13}{54}, \frac{5}{27}, \frac{2}{27}$$

c) $7 - M$ est la médiane des $7 - D_i$, qui ont même loi que les $D_i$ : $M$ et $7 - M$ ont même loi, donc $\mathbb{E}(M) = \frac{7}{2}$.

**Réponse.** Loi $\frac{2}{27}, \frac{5}{27}, \frac{13}{54}, \frac{13}{54}, \frac{5}{27}, \frac{2}{27}$, symétrique, $\mathbb{E}(M) = \frac{7}{2}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le paradoxe de Saint-Pétersbourg

a) $\mathbb{P}(G = 2^k) = \frac{1}{2^k}$ pour $k \ge 1$, et $\sum_k 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_k 1 = +\infty$.

b) $G' = 2^X$ si $X \le 20$, $2^{20}$ sinon :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{E}(G') = \sum_{k=1}^{20} 2^k \frac{1}{2^k} + 2^{20}\,\mathbb{P}(X > 20) = 20 + 1 = 21$$

c) Malgré une espérance infinie « sur le papier », la limitation de la banque ramène le prix équitable à 21 euros. Et $\mathbb{P}(G \geq 64) = \mathbb{P}(X \geq 6) = \frac{1}{32}$ : le joueur gagne presque toujours peu ; l'espérance est portée par des événements extrêmement rares.

**Réponse.** $\mathbb{P}(G = 2^k) = 2^{-k}$, $\mathbb{E}(G) = +\infty$ ; avec une banque de $2^{20}$ : $\mathbb{E}(G') = 21$ ; $\mathbb{P}(G \geq 64) = \frac{1}{32}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).