Plaquette 1 – Lois usuelles, approximations et couples de variables discrètes

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Tableau des lois usuelles.

Loi	Support	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{V}(X)$
$B(p)$	$\{0,1\}$	p ou q	p	pq
$B(n,p)$	$[\![0,n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$	np	npq
Unif. $[\![1,n]\!]$	$[\![1,n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
$G(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
$P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

(avec $q = 1-p$)

Approximation de Poisson. Si n est **grand**, p **petit** et $np = \lambda$ modéré :

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Règle usuelle : $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$, $np \leq 10$.

Stabilité.

— $B(n,p) + B(m,p) = B(n+m,p)$ (indépendantes, **même** p).
— $P(\lambda) + P(\mu) = P(\lambda+\mu)$ (indépendantes).

Couples discrets.

— **Loi conjointe** $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$; **marginales** obtenues par **sommation** sur l'autre variable.
— **Indépendance** : la loi conjointe est le **produit** des marginales, pour **tous** les couples de valeurs.
— **Loi conditionnelle** : $\mathbb{P}(X=x \mid Y=y) = \dfrac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$.
— **Transfert** : $\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_{x,y} g(x,y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$ dès que la famille est sommable.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître une loi

— a) **Binomiale** $B\left(20\,;\frac{1}{2}\right)$: 20 épreuves identiques indépendantes. $\mathbb{E}(X) = 10$, $\mathrm{V}(X) = 5$.
— b) **Géométrique** $G\left(\frac{1}{8}\right)$: tirages **avec remise**, donc indépendants, probabilité de succès $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. $\mathbb{E}(X) = 8$.
— c) **Poisson** $P(0{,}5)$: comptage d'événements **rares** sur un support continu, de moyenne connue. $\mathbb{E}(X) = \mathrm{V}(X) = 0{,}5$.
— **Réflexes de reconnaissance** : nombre **fixé** d'épreuves → binomiale ; **temps d'attente** → géométrique ; **comptage rare sans borne** → Poisson.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Piège du b)** : sans remise, la loi ne serait **pas** géométrique (les tirages ne seraient plus indépendants).

Réponse. a) $B(20\,;0{,}5)$ · b) $G\left(\frac{1}{8}\right)$ · c) $P(0{,}5)$.

Correction de l'exercice 2 – Moments de la loi géométrique

— **Définition** : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k\,q^{k-1}p$ avec $q = 1-p$.

— On reconnaît la **série géométrique dérivée** : $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x|<1$.

— Avec $x = q$:

$$\mathbb{E}(X) = p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

— **Interprétation** : avec une probabilité de succès $p = \dfrac{1}{6}$, il faut en moyenne 6 essais — résultat intuitif.

— **Variance** (même méthode avec la dérivée seconde) : $\mathrm{V}(X) = \dfrac{q}{p^2}$.

— **Contrôle numérique** ($p = \frac{1}{6}$) : $\mathbb{E} = 6$ et $\sigma = \dfrac{\sqrt{5/6}}{1/6} = 6\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 5{,}48$ — une dispersion presque égale à la moyenne, caractéristique des temps d'attente.

Réponse. Série géométrique dérivée : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.

Correction de l'exercice 3 – Moments de la loi de Poisson

Espérance.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geq 1} k\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda$$

Moment factoriel. On calcule $\mathbb{E}[X(X-1)]$, plus simple que $\mathbb{E}\left(X^2\right)$:

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geq 2}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2$$

— Donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda$, et

$$\mathrm{V}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

— **Particularité** : espérance et variance sont **égales** — c'est une signature de la loi de Poisson, utilisée pour tester l'adéquation d'un modèle à des données.

— **Astuce à retenir** : passer par les **moments factoriels** $\mathbb{E}[X(X-1)\cdots]$ simplifie considérablement les calculs avec des factorielles.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \mathrm{V}(X) = \lambda$.

Correction de l'exercice 4 – Approximation de Poisson

Valeur exacte : $X \sim B(200\,;0{,}01)$.

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{200}{3}(0{,}01)^3(0{,}99)^{197} \approx 0{,}1814$$

Approximation de Poisson : $\lambda = np = 2$.

$$\mathbb{P}(X=3) \approx \mathrm{e}^{-2}\frac{2^3}{3!} = \frac{8\mathrm{e}^{-2}}{6} \approx 0{,}1804$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Écart relatif** : moins de 1 % — l'approximation est excellente.
— **Conditions vérifiées** : $n = 200 \geq 30$, $p = 0{,}01 \leq 0{,}1$, $\lambda = 2 \leq 10$ ✓
— **Intérêt** : le calcul de Poisson ne demande qu'une exponentielle, là où la binomiale exige un coefficient binomial énorme ($\binom{200}{3} = 1\,313\,400$).
— **Contrôle des moments** : binomiale, $\mathbb{E} = 2$ et $\mathrm{V} = 1{,}98$; Poisson, $\mathbb{E} = \mathrm{V} = 2$ — très proches ✓

Réponse. Exact $\approx 0{,}1814$; Poisson $\approx 0{,}1804$.

Correction de l'exercice 5 – Loi conjointe

— **Cas** $x < y$: il y a **deux** lancers favorables ($(2,5)$ et $(5,2)$), donc

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 0{,}0556$$

— **Cas** $x = y$: un seul lancer favorable,

$$\mathbb{P}(X = 3, Y = 3) = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278$$

— **Loi conjointe générale** : $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{2}{36}$ si $x < y$, $\frac{1}{36}$ si $x = y$, et 0 si $x > y$.
— **Contrôle de normalisation** : 6 cas diagonaux et $\binom{6}{2} = 15$ cas $x < y$, soit $\frac{6 \times 1 + 15 \times 2}{36} = \frac{36}{36} = 1$ ✓
— **Indépendance ?** Non : $\mathbb{P}(X = 5, Y = 2) = 0$ alors que les deux marginales sont non nulles — la contrainte $X \leq Y$ crée une dépendance forte.

Réponse. $\frac{1}{18}$ et $\frac{1}{36}$.

Correction de l'exercice 6 – Lois marginales

On somme la loi conjointe sur y, ou l'on raisonne directement.

— **Méthode de la queue** : $X \geq k$ signifie que les **deux** dés sont $\geq k$, ce qui laisse $(7-k)^2$ cas.
— $\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{(7-k)^2}{36}$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{(7-k)^2 - (6-k)^2}{36} = \frac{13 - 2k}{36}$$

— **Valeurs** : $\frac{11}{36}, \frac{9}{36}, \frac{7}{36}, \frac{5}{36}, \frac{3}{36}, \frac{1}{36}$ pour $k = 1, \ldots, 6$.
— **Contrôle** : la somme vaut $\frac{11+9+7+5+3+1}{36} = \frac{36}{36} = 1$ ✓
— **Espérance** : $\mathbb{E}(X) = \frac{11+18+21+20+15+6}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$.
— **Cohérence** : $\mathbb{E}(\max) = 7 - \mathbb{E}(\min) \approx 4{,}47$ (par symétrie $k \mapsto 7-k$), et leur somme vaut $7 = \mathbb{E}(D_1) + \mathbb{E}(D_2)$ ✓

Réponse. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{13-2k}{36}$, d'espérance $\frac{91}{36} \approx 2{,}53$.

Correction de l'exercice 7 – Indépendance

— **Décomposition** sur les valeurs communes :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \geq 1} \left(q^{k-1}p\right)^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Calcul** : $p^2 \sum_{k \geq 1} q^{2(k-1)} = \dfrac{p^2}{1-q^2}$.

— **Simplification** : $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q) = p(2-p)$, donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{2-p}$$

— **Contrôle** ($p = \frac{1}{2}$) : $\dfrac{0{,}5}{1{,}5} = \dfrac{1}{3}$.

— **Vérification directe** pour $p = \frac{1}{2}$: $\sum_{k \geq 1} \left(2^{-k}\right)^2 = \sum 4^{-k} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$ ✓

— **Cas limites** : $p \to 1$ donne $\mathbb{P}(X = Y) \to 1$ (les deux valent 1 presque sûrement) ; $p \to 0$ donne 0 (les valeurs sont très dispersées).

Réponse. $\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{p}{2-p}$.

Correction de l’exercice 8 – Loi conditionnelle

Probabilités totales avec le système complet $(\{X = k\})_{0 \leq k \leq n}$:

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}$$

— **Identité combinatoire** : $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

— En posant $m = k - j$ et en factorisant $\binom{n}{j}(pq)^j$:

$$\mathbb{P}(Y = j) = \binom{n}{j}(pq)^j \sum_{m=0}^{n-j} \binom{n-j}{m} [p(1-q)]^m (1-p)^{n-j-m}$$

— La somme est un **binôme de Newton** : $[p(1-q) + 1 - p]^{n-j} = (1-pq)^{n-j}$.

— **Conclusion** : $Y \sim B(n, pq)$.

— **Contrôle intuitif** : chacune des n épreuves donne un succès **retenu** avec probabilité pq, indépendamment ✓

— **Espérance** : $\mathbb{E}(Y) = npq$, ce qui se retrouve aussi par $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y \mid X)] = \mathbb{E}(qX) = qnp$ ✓

Réponse. $Y \sim B(n, pq)$.

Correction de l’exercice 9 – Loi du maximum

— **Fonction de répartition** : $M \leq k$ signifie que **tous** les X_i sont $\leq k$; par indépendance,

$$\mathbb{P}(M \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$

— **Loi** : par différence,

$$\mathbb{P}(M = k) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}, \qquad 1 \leq k \leq N$$

— **Contrôle de normalisation** : la somme **télescope** et vaut $\dfrac{N^n}{N^n} = 1$ ✓

— **Cas $n = 2$, $N = 6$** : $\mathbb{P}(M = k) = \dfrac{2k-1}{36}$ — on retrouve la loi du maximum de deux dés ✓

— **Comportement asymptotique** : $\mathbb{E}(M) \approx \dfrac{n}{n+1} N$ — avec beaucoup de tirages, le maximum approche N.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Application** : c'est le principe de l'**estimation du nombre de chars allemands** (problème historique d'estimation de N à partir d'un échantillon).

Réponse. $\mathbb{P}(M=k)=\dfrac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$.

Correction de l'exercice 10 – Somme de variables indépendantes

— **Convolution** : $\mathbb{P}(X+Y=s)=\sum_k \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=s-k)$.

— Les contraintes $1\le k\le n$ et $1\le s-k\le n$ donnent, pour $2\le s\le n+1$, les valeurs $k=1,\dots,s-1$ — soit $s-1$ termes.

— Chaque terme vaut $\dfrac{1}{n^2}$, donc

$$\mathbb{P}(X+Y=s)=\frac{s-1}{n^2}$$

— **Symétrie** : pour $s>n+1$, la formule devient $\dfrac{2n+1-s}{n^2}$ — la loi est **triangulaire**, maximale en $s=n+1$.

— **Contrôle** ($n=6$, $s=7$) : $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ ✓ — c'est bien la somme la plus probable de deux dés.

— **Contrôle de normalisation** : $\sum_{s=2}^{2n}\mathbb{P}=\dfrac{1+2+\dots+n+\dots+2+1}{n^2}=\dfrac{n^2}{n^2}=1$ ✓

— **Remarque** : la somme de deux uniformes n'est **pas** uniforme — un résultat qui surprend souvent.

Réponse. $\mathbb{P}(X+Y=s)=\dfrac{s-1}{n^2}$ pour $2\le s\le n+1$.

Correction de l'exercice 11 – Modélisation

— **Modèle** : $X\sim P(4)$, panne si $X\ge 9$.

— **Complémentaire** : $\mathbb{P}(X\ge 9)=1-\sum_{k=0}^{8}\mathrm{e}^{-4}\dfrac{4^k}{k!}$.

— **Calcul** : la somme cumulée vaut $\approx 0{,}97864$, donc

$$\mathbb{P}(\text{panne})\approx 0{,}0214$$

— **Soit environ** 2,1 % des secondes.

— **Contrôle de vraisemblance** : $\mathbb{E}(X)=4$ et $\sigma=2$; l'événement $X\ge 9$ est à plus de 2 écarts types de la moyenne, une probabilité de 2 % est cohérente ✓

— **Lecture opérationnelle** : sur une heure, cela représente environ $3\,600\times 0{,}0214\approx 77$ secondes de panne — inacceptable, il faudrait dimensionner pour λ plus petit ou augmenter le seuil.

Réponse. $\mathbb{P}(X\ge 9)\approx 0{,}021$, soit environ 2,1 %.

Correction de l'exercice 12 – Somme de deux dés

a) Les 36 couples sont équiprobables ; pour $s\le 7$, les couples $(i,s-i)$ avec $1\le i\le s-1$ sont au nombre de $s-1=6-(7-s)$, et l'on conclut par symétrie $s\leftrightarrow 14-s$.

b) Le mode est 7, de probabilité $\dfrac{1}{6}$. Et

$$\mathbb{P}(S\ge 10)=\frac{3+2+1}{36}=\frac{1}{6}$$

c) Non, la loi est « triangulaire ». Le résultat admis montre que la somme de deux variables indépendantes uniformes ne peut pas être uniforme, quel que soit le trucage.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathbb{P}(S=s)=\dfrac{6-|s-7|}{36}$, mode 7, $\mathbb{P}(S\geq 10)=\dfrac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 13 – De la loi hypergéométrique à la loi binomiale

a) $\mathbb{P}(X_N=k)=\dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ (loi hypergéométrique).

b) En développant les coefficients binomiaux :

$$\mathbb{P}(X_N=k)=\binom{n}{k}\frac{\prod_{i<k}(Np-i)\prod_{j<n-k}(N(1-p)-j)}{\prod_{\ell<n}(N-\ell)}\to\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

car le quotient comporte n facteurs au numérateur et au dénominateur, chacun équivalent à Np, $N(1-p)$ ou N.

c) $\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{80\cdot 79\cdot 78\cdot 77\cdot 76}{100\cdot 99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}\approx 0{,}319$, contre $0{,}8^5\approx 0{,}328$: quand la population est grande devant l'échantillon, tirer sans remise ou avec remise revient presque au même.

Réponse. Loi hypergéométrique, qui tend vers $B(n,p)$; ici 0,319 contre 0,328.

Correction de l'exercice 14 – Caractérisation de la loi géométrique

a) $(X>n+k)\subset(X>n)$, donc $\mathbb{P}(X>n+k)=\mathbb{P}(X>n)\mathbb{P}(X>n+k\mid X>n)=u_nu_k$.

b) Par récurrence $u_n=u_1^n$. Si $q=1$, alors $\mathbb{P}(X>n)=1$ pour tout n et, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(X=+\infty)=1$, impossible ; et $q>0$ par hypothèse.

c) $\mathbb{P}(X=n)=u_{n-1}-u_n=q^{n-1}(1-q)$:

$$X\sim G(1-q)$$

La loi géométrique est la seule loi sur $\mathbb{N}^*$ sans mémoire.

Réponse. $\mathbb{P}(X>n)=q^n$, donc $X\sim G(1-q)$: seule loi sans mémoire sur $\mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : comparaison de lois

Probabilités.

— **Binomiale** : $\mathbb{P}(X\geq 1)=1-(0{,}98)^{100}=1-0{,}13262=0{,}86738$.
— **Poisson** : $\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\mathrm{e}^{-2}=1-0{,}13534=0{,}86466$.
— **Écart** : 0,0027, soit environ 0,3 % — l'approximation est très bonne.

Variances.

— Binomiale : $npq=100\times 0{,}02\times 0{,}98=1{,}96$.
— Poisson : $\lambda=2$.
— L'écart est le facteur $q=0{,}98$, proche de 1 — c'est exactement la **correction** que l'approximation néglige.
— **Règle** : l'approximation de Poisson **surestime légèrement** la dispersion, d'autant plus que p est grand.
— **Quand elle échoue** : avec $n=10$ et $p=0{,}5$ ($\lambda=5$), la binomiale est bornée par 10 alors que la Poisson charge toutes les valeurs — les lois diffèrent nettement.

Réponse. 0,8674 contre 0,8647 ; variances 1,96 contre 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).