Plaquette 5 – Synthèse : modéliser avec les lois discrètes

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Choix de la loi.

— n épreuves indépendantes de même probabilité de succès : $B(n,p)$;
— tirages sans remise dans une population finie : loi hypergéométrique ;
— rang du premier succès : $G(p)$; nombre d'événements rares : $P(\lambda)$ avec $\lambda = np$.

Indicatrices. Si $X = \sum_i 1_{A_i}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$$

même si les A_i ne sont pas indépendants.

Bienaymé-Tchebychev. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Correction de l'exercice 1 – L'équilibre de Hardy-Weinberg

a) Probabilités totales selon le génotype du parent : $u \cdot 1 + v \cdot \frac{1}{2} + w \cdot 0 = u + \frac{v}{2}$.

b) Les deux allèles reçus sont indépendants, d'où, avec $q = 1 - p$:

$$\mathbb{P}(AA) = p^2, \qquad \mathbb{P}(Aa) = 2pq, \qquad \mathbb{P}(aa) = q^2$$

c) À la génération suivante, la fréquence de transmission de A vaut
$p^2 + \dfrac{2pq}{2} = p(p+q) = p$: les fréquences p^2, $2pq$, q^2 se reproduisent à l'identique.

Réponse. Génotypes p^2, $2pq$, q^2 avec $p = u + \frac{v}{2}$, stables dès la deuxième génération.

Correction de l'exercice 2 – Boules dans des boîtes

a) Chaque boule évite la boîte avec probabilité $1 - \frac{1}{n}$: $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

b) $V = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\text{boîte } i \text{ vide}\}}$, donc $\mathbb{E}(V) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

c) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$: environ 37 % des boîtes restent vides. Pour $n = 10$:

$$\mathbb{E}(V) = 10 \times 0{,}9^{10} \approx 3{,}49$$

Réponse. $\mathbb{E}(V) = n(1 - \frac{1}{n})^n \sim \frac{n}{\mathrm{e}}$; pour $n = 10$: $\approx 3{,}49$.

Correction de l'exercice 3 – Fiabilité d'un système

a) $p^3 = 0{,}729$.

b) $1 - (1-p)^3 = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$.

c) Le nombre de composants en état de marche suit $B(3; 0{,}9)$:

$$\mathbb{P}(\geq 2) = 3 \times 0{,}81 \times 0{,}1 + 0{,}729 = 0{,}972$$

Le montage « 2 sur 3 » (utilisé en aéronautique pour voter entre trois capteurs) est bien plus fiable qu'un composant seul, sans exiger la redondance totale du parallèle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Série 0,729, parallèle 0,999, « 2 sur 3 » 0,972.

Correction de l’exercice 4 – Défauts d’un tissu

a) Par stabilité, $P(4 \times 0{,}5) = P(2)$.

b) $\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$ et $\mathrm{e}^{-2}(1+2+2) = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}677$.

c) Pour une surface s, le nombre de défauts suit $P(0{,}5s)$ et

$$\mathrm{e}^{-0{,}5s} \geq 0{,}9 \Leftrightarrow s \leq 2\ln\frac{10}{9} \approx 0{,}21 \text{ m}^2$$

Réponse. $P(2)$; sans défaut $\approx 0{,}135$, au plus deux $\approx 0{,}677$; surface $\leq 0{,}21$ m².

Correction de l’exercice 5 – Les arrêts d’un ascenseur

a) Il s’arrête au 5e étage si au moins une personne l’a choisi : $1 - 0{,}9^{10} \approx 0{,}651$.

b) Par linéarité (indicatrices des étages) :

$$\mathbb{E}(\text{arrêts}) = 10\left(1 - 0{,}9^{10}\right) \approx 6{,}51$$

c) Il faut que les dix personnes choisissent dix étages différents : $\frac{10!}{10^{10}} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-4}$. En moyenne, plus de trois étages ne sont pas desservis.

Réponse. $\mathbb{P}(\text{arrêt au 5e}) = 1 - 0{,}9^{10}$; $\approx 6{,}51$ arrêts en moyenne ; tous les étages : $\frac{10!}{10^{10}}$.

Correction de l’exercice 6 – La planche de Galton

a) $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

b) $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{252}{1024} \approx 0{,}246$ et $\mathbb{P}(X \in \{0, 10\}) = \frac{2}{1024} \approx 0{,}002$.

c) $1024 \times \frac{252}{1024} = 252$ billes en moyenne. Les effectifs attendus sont proportionnels aux coefficients binomiaux :

$$1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1$$

qui dessinent la courbe en cloche (approximation par la loi normale, hors programme).

Réponse. $X \sim B(n, \frac{1}{2})$; case centrale $\frac{252}{1024}$; 252 billes attendues sur 1024.

Correction de l’exercice 7 – Sinistres d’une compagnie d’assurance

a) $\mathbb{P}(S = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$; $S = 1$ exige un seul sinistre de coût 1 : $\frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$; $S = 2$: un sinistre de coût 2 ou deux sinistres de coût 1 :

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{8}\right)$$

b) Sachant $N = n$, le coût moyen est $\frac{3}{2}n$; d’où $\mathbb{E}(S) = \sum_n \mathbb{P}(N = n)\frac{3}{2}n = \frac{3}{2}\mathbb{E}(N)$.

c) $\mathbb{E}(S) = 0{,}3$ millier d’euros : la prime doit dépasser 300 € (plus les frais et une marge de sécurité).

Réponse. $\mathbb{P}(S = 0, 1, 2) = \mathrm{e}^{-\lambda}(1, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{8})$; $\mathbb{E}(S) = \frac{3}{2}\lambda$; prime > 300 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Les chances au loto

a) Loi hypergéométrique : $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$, avec $\binom{49}{6}=13\,983\,816$.

b) $\mathbb{P}(X=6)=\dfrac{1}{13\,983\,816}\approx 7\cdot 10^{-8}$; $\mathbb{P}(X=3)=\dfrac{20\times 12\,341}{13\,983\,816}\approx 0{,}0177$;
$\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}}=\dfrac{6\,096\,454}{13\,983\,816}\approx 0{,}436$.

c) Chacun des 6 numéros cochés est gagnant avec probabilité $\frac{6}{49}$:

$$\mathbb{E}(X)=\frac{36}{49}\approx 0{,}73$$

Réponse. Loi hypergéométrique ; $\mathbb{P}(X=6)\approx 7\cdot 10^{-8}$, $\mathbb{P}(X=3)\approx 0{,}018$, $\mathbb{P}(X=0)\approx 0{,}436$; $\mathbb{E}(X)=\frac{36}{49}$.

Correction de l'exercice 9 – Code à répétition

a) Le nombre d'erreurs suit $B(3,p)$; le décodage échoue s'il vaut au moins 2 :
$3p^2(1-p)+p^3=3p^2-2p^3=0{,}028$.

b) $B(5,p)$, au moins 3 erreurs :

$$10p^3q^2+5p^4q+p^5=0{,}0081+0{,}00045+0{,}00001\approx 0{,}0086$$

c) L'erreur passe de 10 % à 2,8 % puis 0,86 %, mais le débit utile est divisé par 3 puis par 5 ; les codes correcteurs modernes (Hamming, Reed-Solomon) font beaucoup mieux.

Réponse. Erreur 0,028 avec 3 répétitions, ≈ 0,0086 avec 5.

Correction de l'exercice 10 – Premier défaut sur une chaîne de production

a) $T\sim G(0{,}002)$, $\mathbb{E}(T)=500$.

b) $\mathbb{P}(T>1000)=0{,}998^{1000}=\mathrm{e}^{1000\ln 0{,}998}\approx \mathrm{e}^{-2{,}002}\approx 0{,}135$.

c) Absence de mémoire :

$$\mathbb{P}(T>1500\mid T>500)=\mathbb{P}(T>1000)\approx 0{,}135$$

La machine ne « s'use » pas dans ce modèle : une hypothèse à remettre en cause si l'on observe une dérive.

Réponse. $T\sim G(0{,}002)$, $\mathbb{E}(T)=500$; $\mathbb{P}(T>1000)\approx 0{,}135$, même probabilité sachant 500 bonnes pièces.

Correction de l'exercice 11 – Boîtes défectueuses sur une palette

a) $X\sim B(200;0{,}01)$, approchée par $P(2)$.

b) $\mathbb{P}(X\geq 4)\approx 1-\mathrm{e}^{-2}\left(1+2+2+\frac{4}{3}\right)=1-\frac{19}{3}\mathrm{e}^{-2}$, soit

$$\mathbb{P}(X\geq 4)\approx 1-0{,}857=0{,}143$$

c) Le nombre de refus suit $B(50;0{,}143)$, d'espérance ≈ 7,1 palettes.

Réponse. $X\approx P(2)$; refus ≈ 0,143 ; environ 7 refus sur 50 palettes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Rang du premier as

a) $\mathbb{P}(T=1)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$, et $\mathbb{P}(T>k)=\dfrac{\binom{28}{k}}{\binom{32}{k}}$ (les k premières cartes sont des non-as).

b) $\mathbb{P}(T>5)=\dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}=\frac{98\,280}{201\,376}\approx 0{,}488$.

c) $T-1$ compte les non-as placés avant tous les as. Pour une carte non-as c, parmi les 5 cartes $\{c, \text{les 4 as}\}$, chacune est la première avec probabilité $\frac{1}{5}$:

$$\mathbb{E}(T)=1+28\times\frac{1}{5}=\frac{33}{5}=6{,}6$$

Réponse. $\mathbb{P}(T=1)=\frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(T>5)\approx 0{,}488$, $\mathbb{E}(T)=\frac{33}{5}$.

Correction de l'exercice 13 – Ce dé est-il pipé ?

a) $X\sim B\left(60,\frac{1}{6}\right)$, $\mathbb{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(X)=60\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{3}$.

b) $\mathbb{P}(|X-10|\geq 8)\leq\frac{25/3}{64}\approx 0{,}13$ (un calcul exact donne $\approx 0{,}009$: l'inégalité est grossière).

c) $X\sim B\left(60,\frac{1}{3}\right)$: $\mathbb{E}(X)=20$ et $\mathrm{V}(X)=\frac{40}{3}$. Le dé est déclaré pipé dès que $X\geq 18$, et

$$\mathbb{P}(X\leq 17)\leq\mathbb{P}(|X-20|\geq 3)\leq\frac{40/3}{9}\approx 1{,}5$$

majoration inutile : Bienaymé-Tchebychev ne permet pas de conclure ici, il faut un calcul exact, qui donne une probabilité de détection $\approx 0{,}75$.

Réponse. $X\sim B(60,\frac{1}{6})$; fausse alarme $\leq 0{,}13$; pour un dé à $\frac{1}{3}$, $\mathbb{E}(X)=20$ mais Bienaymé-Tchebychev est trop grossier.

Correction de l'exercice 14 – Avoir des enfants jusqu'au premier garçon

a) $\mathbb{P}(F=k)=\frac{1}{2^{k+1}}$ pour $k\geq 0$: $F+1\sim G\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $\mathbb{E}(F)=2-1=1$.

b) $F+1\sim G\left(\frac{1}{2}\right)$, d'espérance 2.

c) Chaque famille a exactement un garçon et, en moyenne, une fille :

$$\frac{\mathbb{E}(F)}{\mathbb{E}(F)+1}=\frac{1}{2}$$

La règle d'arrêt ne change pas la proportion : chaque naissance reste un tirage équilibré, indépendant des précédents.

Réponse. $F+1\sim G(\frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(F)=1$: la proportion de filles reste $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : tests groupés

a) Pour un groupe, on fait 1 test si tous sont sains (probabilité q^k) et $1+k$ sinon : en moyenne $1+k(1-q^k)$ tests, soit $\frac{1}{k}+1-q^k$ par personne.

b) $f(10)=0{,}1+1-0{,}99^{10}\approx 0{,}1956$; $f(11)\approx 0{,}0909+0{,}1047=0{,}1956$ (très légèrement inférieur) ; $f(12)\approx 0{,}0833+0{,}1136=0{,}1969$. Le meilleur est $k=11$, quasiment à égalité avec $k=10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $f(k) \approx \frac{1}{k} + kp$, minimal pour $k = \frac{1}{\sqrt{p}} = 10$, de valeur

$$2\sqrt{p} = 0{,}2$$

Environ 196 tests au lieu de 1000 : une économie de 80 %, d'autant plus forte que l'infection est rare.

Réponse. $f(k) = \frac{1}{k} + 1 - (1-p)^k$; optimum $k = 11$ (ou 10), environ 0,196 test par personne : 80 % d'économie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).