Plaquette 2 – Lois binomiale, hypergéométrique et multinomiale

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On reconnaît une **loi binomiale** quand on compte les succès de n épreuves **indépendantes et identiques** (tirages **avec remise**), une **loi hypergéométrique** pour des tirages **sans remise** dans une population finie, et une **loi multinomiale** quand chaque épreuve a plus de deux issues. Pour étudier une loi binomiale (mode, monotonie), on utilise le **rapport** $\dfrac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}$; pour calculer une espérance ou une variance de comptage, on écrit le compte comme une **somme d'indicatrices**.

Exercice 1 – Mode de la loi binomiale

Soit $X \sim B(n,p)$ avec $0<p<1$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X=k+1) \geq \mathbb{P}(X=k)$ si et seulement si $k \leq (n+1)p-1$.

b) En déduire que la loi est croissante puis décroissante, et que son maximum est atteint en $\lfloor (n+1)p \rfloor$.

c) Application : $n=10$, $p=0{,}3$; puis $n=9$, $p=0{,}3$.

Exercice 2 – Symétrie et parité de la binomiale

Soit $X \sim B(n,p)$, $q=1-p$.

a) Montrer que $n-X \sim B(n,q)$ et interpréter.

b) En développant $(q+p)^n$ et $(q-p)^n$, montrer que $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2}$.

c) Pour quelles valeurs de p cette probabilité vaut-elle $\dfrac{1}{2}$ pour tout n ? Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?

Exercice 3 – QCM répondu au hasard

Un QCM comporte 20 questions à 4 réponses dont une seule juste. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.

a) Quelle est la loi du nombre X de bonnes réponses ? Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ et $\mathbb{P}(X=0)$.

b) Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise en retire $\dfrac{1}{3}$. Calculer l'espérance de la note.

c) Pourquoi ce barème est-il « neutre » ?

Exercice 4 – Contrôle d'un lot sans remise

Un lot de 50 pièces en contient 4 défectueuses. On prélève 5 pièces sans remise et l'on accepte le lot si aucune n'est défectueuse.

a) Quelle est la loi du nombre X de pièces défectueuses prélevées ?

b) Calculer la probabilité d'accepter le lot.

c) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Capture-recapture

Un lac contient N poissons. On en capture $m = 100$, on les marque et on les relâche ; plus tard on en capture $n = 50$, parmi lesquels $k = 5$ sont marqués.

a) Exprimer la probabilité $L(N)$ d'observer k poissons marqués.

b) Montrer que $\dfrac{L(N)}{L(N-1)} \geq 1$ si et seulement si $N \leq \dfrac{mn}{k}$.

c) En déduire la valeur de N qui rend l'observation la plus probable.

Exercice 6 – Espérance et variance de la loi hypergéométrique

On tire n boules sans remise dans une urne de N boules dont $K = Np$ blanches ; X est le nombre de blanches et A_i l'événement « le i-ième tirage donne une blanche ».

a) Montrer que $\mathbb{P}(A_i) = p$ et $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{K(K-1)}{N(N-1)}$ pour $i \neq j$.

b) En déduire $\mathbb{E}(X) = np$.

c) Montrer que $\mathrm{V}(X) = np(1-p)\dfrac{N-n}{N-1}$ et comparer au cas avec remise.

Exercice 7 – Calcul récursif d'une loi binomiale

Soit $X \sim B\left(5, \dfrac{1}{3}\right)$.

a) Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) À l'aide de la relation $\mathbb{P}(X = k+1) = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{p}{q}\,\mathbb{P}(X = k)$, dresser le tableau de la loi.

c) Vérifier la somme et identifier le ou les modes.

Exercice 8 – Nombre de lancers pour être presque sûr

On lance un dé équilibré n fois.

a) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6.

b) Combien de lancers faut-il pour que cette probabilité dépasse 0,99 ?

c) Plus généralement, pour un événement de probabilité p petite, montrer que le nombre de répétitions nécessaire pour l'observer avec probabilité $1 - \alpha$ est environ $\dfrac{\ln(1/\alpha)}{p}$.

Exercice 9 – La loi multinomiale

On lance 6 dés équilibrés. On note N_1, N_2 les nombres de 1 et de 2, et N_3 le nombre des autres résultats.

a) Calculer $\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2, N_3 = 2)$.

b) Quelle est la loi de N_1 ? Celle de $N_1 + N_2$?

c) N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 10 – Série au meilleur des sept matchs

Deux équipes s'affrontent ; l'équipe A gagne chaque match avec probabilité p, indépendamment. La première à 4 victoires remporte la série.

a) Montrer que $\mathbb{P}(A \text{ gagne en } 4+k \text{ matchs}) = \binom{3+k}{k} p^4 q^k$ pour $0 \leq k \leq 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer $\mathbb{P}(A \text{ gagne})$ pour $p = 0{,}6$.
c) Montrer que c'est aussi $\mathbb{P}(Y \geq 4)$ avec $Y \sim B(7, p)$, et l'expliquer.

Exercice 11 – Monotonie de la binomiale en p

Soit $X_p \sim B(n, p)$ et $k \in \{1, \dots, n\}$ fixé ; on pose $F(p) = \mathbb{P}(X_p \geq k)$.

a) Montrer que $F'(p) = n\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$ (télescopage).
b) En déduire que F est croissante sur $[0, 1]$.
c) Interpréter, et en déduire que $\mathbb{P}(X_p \geq k) = n\binom{n-1}{k-1}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 12 – Égalité de deux binomiales

Soient X, Y indépendantes de loi $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.
b) En déduire, avec la formule de Vandermonde, $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
c) Retrouver ce résultat en remarquant que $n - Y$ a la même loi que Y.

Exercice 13 – Tirages avec ou sans remise

Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires ; on en tire 3.

a) Donner la loi du nombre X de blanches pour des tirages avec remise.
b) Même question, Y, pour des tirages sans remise.
c) Comparer les espérances et les variances, et commenter.

Exercice 14 – Réussite d'un examen à épreuves multiples

Un examen comporte 10 épreuves indépendantes, chacune réussie avec probabilité 0,8 ; il faut en réussir au moins 8.

a) Calculer la probabilité d'être reçu.
b) Le candidat peut repasser une fois les épreuves échouées, chacune réussie à nouveau avec probabilité 0,8. Montrer que chaque épreuve est finalement réussie avec probabilité 0,96.
c) En déduire la probabilité d'être reçu avec rattrapage.

Exercice 15 – Synthèse : courbe d'efficacité d'un plan de contrôle

Un client contrôle un grand lot (proportion inconnue θ de défauts) en prélevant 20 pièces, assimilées à des tirages avec remise ; il accepte le lot s'il trouve au plus une pièce défectueuse. On note $L(\theta)$ la probabilité d'acceptation.

a) Montrer que $L(\theta) = (1-\theta)^{20} + 20\theta(1-\theta)^{19}$.
b) Montrer que L est strictement décroissante sur $[0, 1]$ ($L'(\theta) = -380\,\theta(1-\theta)^{18}$).
c) Calculer $L(0{,}01)$ et $L(0{,}1)$, et commenter le risque du fournisseur et celui du client.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).