Plaquette 3 – Lois géométrique, de Pascal et de Poisson

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La **loi géométrique** modélise le **rang du premier succès** dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes ; le **rang du r-ième succès** suit une **loi de Pascal** (somme de r géométriques indépendantes). La **loi de Poisson** modélise un **nombre d'événements rares** (appels, défauts, désintégrations) et apparaît comme limite de lois binomiales. Pour étudier ces lois sur $\mathbb{N}$, on utilise les **séries** (géométrique, exponentielle, binomiale négative), les **queues** $\mathbb{P}(X > n)$ et le **rapport** de deux probabilités consécutives.

Exercice 1 – Mode de la loi de Poisson

Soit $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$.

a) Comparer $\mathbb{P}(X = k+1)$ et $\mathbb{P}(X = k)$.

b) En déduire la ou les valeurs les plus probables de X.

c) Application : $\lambda = 3{,}5$ puis $\lambda = 3$; calculer dans ce dernier cas la probabilité maximale.

Exercice 2 – Rang du r-ième succès

On répète des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p et l'on note T_r le rang du r-ième succès.

a) Montrer que $\mathbb{P}(T_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$ pour $n \geq r$.

b) Justifier que T_r est la somme de r variables indépendantes de loi $G(p)$, et en déduire $\mathbb{E}(T_r)$ et $\mathrm{V}(T_r)$.

c) Combien de lancers d'un dé faut-il en moyenne pour obtenir trois 6 ? Calculer $\mathbb{P}(T_3 = 3)$ et $\mathbb{P}(T_3 = 5)$.

Exercice 3 – Nombre d'échecs avant le r-ième succès

Avec les notations précédentes, on pose $F = T_r - r$ (nombre d'échecs avant le r-ième succès).

a) Déterminer la loi de F.

b) Vérifier que c'est une loi grâce à la série binomiale négative.

c) Pour $r = 1$, quelle loi retrouve-t-on ?

Exercice 4 – Espérance par la queue de la loi

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{k \geq 1} k\,\mathbb{P}(X = k)$ (dans $[0, +\infty]$), en intervertissant les sommes.

b) En déduire l'espérance de la loi géométrique sans calcul de série dérivée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) On lance un dé jusqu'à obtenir un résultat ≥ 5, mais au plus 4 fois ; calculer l'espérance du nombre de lancers.

Exercice 5 – Moments factoriels de la loi de Poisson

Soit $X \sim P(\lambda)$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-j+1)) = \lambda^j$ pour tout $j \geq 1$.

b) En déduire $\mathrm{V}(X)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X^3)$.

Exercice 6 – Estimer le paramètre d'une loi de Poisson

On observe k événements, et l'on suppose que leur nombre suit $P(\lambda)$, λ inconnu.

a) Pour k fixé, étudier $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ et montrer qu'elle est maximale en $\lambda = k$.

b) Dans un livre, 30 % des pages ne comportent aucune faute. En supposant le nombre de fautes par page poissonien, estimer λ.

c) Avec cette valeur, quelle proportion de pages comporte au moins deux fautes ?

Exercice 7 – Fautes de frappe dans un livre

Un livre de 500 pages contient 300 fautes, réparties indépendamment et uniformément entre les pages.

a) Quelle est la loi exacte du nombre X de fautes sur une page donnée ? Par quelle loi l'approcher ?

b) Calculer approximativement la probabilité qu'une page soit sans faute, puis qu'elle en comporte au moins deux.

c) Combien de pages sans faute peut-on attendre dans le livre ?

Exercice 8 – Appels à un standard

Le nombre d'appels reçus en une heure par un standard suit $P(4)$.

a) Calculer la probabilité de ne recevoir aucun appel, puis au plus deux appels, en une heure.

b) En admettant que le nombre d'appels en une demi-heure suit $P(2)$, calculer la probabilité d'aucun appel en une demi-heure.

c) Le standard ne peut traiter que 6 appels par heure. Exprimer la probabilité de saturation et en donner une valeur approchée.

Exercice 9 – Course entre deux géométriques

Soient $X \sim G(p)$ et $Y \sim G(r)$ indépendantes.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X > Y) = \dfrac{r(1-p)}{1-(1-p)(1-r)}$.

b) En déduire $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

c) Application : $p = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{3}$. Interpréter (deux joueurs lancent chacun leur pièce jusqu'au premier succès).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Loi de Poisson conditionnée

Soit $X \sim P(\lambda)$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X \geq 1$ (loi de Poisson « tronquée en zéro »).

b) Calculer son espérance.

c) Un magasin note le nombre de clients des seules journées où il en vient au moins un ; il observe une moyenne de 1,5. Montrer que λ vérifie $\lambda = 1{,}5(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})$, et justifier qu'une telle solution $\lambda > 0$ existe.

Exercice 11 – Nombre d'essais limité

Un candidat tente un concours jusqu'à réussir, chaque tentative réussissant avec probabilité p indépendamment, mais il s'arrête après n échecs au plus. On note Y le nombre de tentatives.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1 - q^n}{p}$.

c) Avec $p = 0{,}4$ et $n = 3$, calculer la probabilité de réussite et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 12 – Majoration de l'erreur d'approximation

Soit $X \sim B(n, p)$ et $\lambda = np$.

a) Montrer que $(1 - p)^n \leq \mathrm{e}^{-\lambda}$.

b) Montrer que $a^n - b^n \leq n(a - b)$ pour $0 \leq b \leq a \leq 1$, et en déduire $0 \leq \mathrm{e}^{-\lambda} - (1 - p)^n \leq \dfrac{np^2}{2}$.

c) Application à $n = 100$, $p = 0{,}02$: comparer la borne et l'erreur réelle.

Exercice 13 – Poisson ou binomiale : un choix de modèle

Une compagnie aérienne vend 102 billets pour un avion de 100 places ; chaque passager se présente indépendamment avec probabilité 0,97.

a) Quelle est la loi du nombre A d'absents ? Par quelle loi de Poisson l'approcher ?

b) La compagnie est en surréservation si $A \leq 1$. Calculer cette probabilité exactement et approximativement.

c) Combien de billets peut-elle vendre pour que la probabilité de surréservation reste inférieure à 5 % (avec l'approximation de Poisson) ?

Exercice 14 – Somme de géométriques indépendantes

Soient $X_1, \ldots, X_r$ indépendantes de loi $G(p)$ et $S_r = X_1 + \cdots + X_r$.

a) Par récurrence et convolution, montrer que $\mathbb{P}(S_r = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}$ (utiliser $\sum_{j=r}^{n-1} \binom{j-1}{r-1} = \binom{n-1}{r}$).

b) En déduire $\mathbb{P}(S_r > n) = \mathbb{P}(Z < r)$ avec $Z \sim B(n, p)$, et l'interpréter.

c) Application : $p = \dfrac{1}{2}$, $r = 2$, $n = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : clients minute par minute

Dans une boutique, les nombres de clients $X_1, X_2, \ldots$ arrivant lors des minutes successives sont indépendants, de loi $P(\lambda)$.

a) Quelle est la loi du nombre $S_m = X_1 + \cdots + X_m$ de clients en m minutes ?

b) Soit T la première minute où arrive au moins un client. Déterminer la loi de T.

c) Sachant que $S_m = n$, déterminer la loi de X_1, et commenter le fait qu'elle ne dépende pas de λ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).