Plaquette 4 – Lois images, mélanges et lois conditionnelles

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour déterminer la **loi d'une variable** $Y = f(X)$, on écrit $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$: on regroupe les valeurs de X qui ont la même image. Pour une variable obtenue en **deux étapes** (un paramètre tiré au hasard, puis une loi dépendant de ce paramètre), on applique la **formule des probabilités totales** : c'est un **mélange**. Pour un **minimum** ou un **maximum**, on passe par $\mathbb{P}(\min \geq k)$ ou $\mathbb{P}(\max \leq k)$, puis on fait une différence. Une loi conditionnelle sachant un événement A s'obtient en restreignant à A et en renormalisant par $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 1 – Reste modulo m d'une géométrique

Soit $X \sim G(p)$, $q = 1 - p$, et $m \geq 2$.

a) Pour $1 \leq j \leq m$, calculer $\mathbb{P}(X \equiv j\ [m])$.

b) Vérifier que l'on obtient une loi sur $\{1, \dots, m\}$, et identifier la valeur la plus probable.

c) Que devient cette loi quand $p \to 0$? Interpréter.

Exercice 2 – Quotient et reste d'une géométrique

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$. On écrit $X = 2A + B$ avec $A = \lfloor X/2 \rfloor$ et $B \in \{0, 1\}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(A = a, B = b)$.

b) En déduire les lois de A et de B.

c) Montrer que A et B sont indépendantes.

Exercice 3 – Valeur absolue et signe

a) Soit X uniforme sur $\{-2, -1, 1, 2\}$. Déterminer les lois de $|X|$ et de $\operatorname{sgn}(X)$, et montrer qu'elles sont indépendantes.

b) Même question pour X uniforme sur $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (avec $\operatorname{sgn}(0) = 0$).

c) Déterminer la loi de $X^2 - X$ dans le cas a).

Exercice 4 – Un entier au hasard entre 1 et le résultat d'un dé

On lance un dé équilibré (résultat N), puis on choisit X uniformément dans $\{1, \dots, N\}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6} \sum_{n=k}^{6} \frac{1}{n}$.

b) Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 6)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ en conditionnant par N.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Minimum de deux uniformes

Soient X, Y indépendantes uniformes sur $\{1, \dots, n\}$ et $U = \min(X, Y)$.

a) Calculer $\mathbb{P}(U \geq k)$.

b) En déduire $\mathbb{P}(U = k) = \dfrac{2n - 2k + 1}{n^2}$ et vérifier la somme.

c) Pour deux dés, calculer $\mathbb{P}(U = 1)$ et $\mathbb{P}(U = 6)$.

Exercice 6 – Somme modulo n et masque jetable

Soient X uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et Y une variable quelconque à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, indépendante de X. On pose $Z = X + Y$ (dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

a) Montrer que Z est uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Montrer que Z est indépendante de Y.

c) Interpréter en cryptographie : Y est un message, X une clé secrète tirée uniformément, Z le message chiffré.

Exercice 7 – Écart entre deux uniformes

Soient X, Y indépendantes uniformes sur $\{1, \dots, n\}$ et $D = |X - Y|$.

a) Déterminer la loi de D.

b) Vérifier la somme.

c) Pour deux dés, quelle est la valeur la plus probable de D ? Calculer $\mathbb{P}(D \geq 3)$.

Exercice 8 – Position d'une marche aléatoire

Une marche part de 0 et fait n pas indépendants, $+1$ avec probabilité p et -1 avec probabilité $q = 1 - p$. On note S_n sa position et B_n le nombre de pas $+1$.

a) Exprimer S_n en fonction de B_n et en déduire la loi de S_n.

b) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{V}(S_n)$.

c) Pour $p = \frac{1}{2}$ et $n = 4$, donner la loi de S_4.

Exercice 9 – Géométrique conditionnée à être paire

Soit $X \sim G(p)$, $q = 1 - p$.

a) Calculer $\mathbb{P}(X \text{ pair})$.

b) Montrer que, sachant que X est pair, $\dfrac{X}{2}$ suit la loi $G(1 - q^2)$.

c) En déduire $\mathbb{E}(X \mid X \text{ pair})$, et le comparer à $\mathbb{E}(X)$ pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 10 – Rang de la première blanche sans remise

Une urne contient 2 boules blanches et n noires ; on tire sans remise et l'on note T le rang de la première blanche.

a) Montrer que $\mathbb{P}(T > k) = \dfrac{(n - k + 1)(n - k + 2)}{(n + 1)(n + 2)}$ pour $0 \leq k \leq n$.

b) En déduire $\mathbb{P}(T = k) = \dfrac{2(n - k + 2)}{(n + 1)(n + 2)}$ pour $1 \leq k \leq n + 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{n+3}{3}$ (utiliser $\mathbb{E}(T) = \sum_k \mathbb{P}(T > k)$ et $\sum_{j=1}^{m} j(j+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$).

Exercice 11 – Nombre de valeurs distinctes de trois dés

On lance trois dés équilibrés et l'on note D le nombre de valeurs distinctes obtenues.

a) Calculer $\mathbb{P}(D = 1)$ et $\mathbb{P}(D = 3)$.

b) En déduire $\mathbb{P}(D = 2)$ et le vérifier par un dénombrement direct.

c) Calculer $\mathbb{E}(D)$, puis le retrouver avec les indicatrices « la valeur v apparaît ».

Exercice 12 – Minimum sachant le maximum

On lance deux dés équilibrés ; on note U le minimum et M le maximum.

a) Calculer $\mathbb{P}(M = 6)$.

b) Déterminer la loi conditionnelle de U sachant $M = 6$.

c) Calculer $\mathbb{E}(U \mid M = 6)$ et la comparer à $\mathbb{E}(U)$.

Exercice 13 – Binomiale sachant au moins un succès

Soit $X \sim B(n, p)$, $q = 1 - p$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X \geq 1$.

b) Montrer que $\mathbb{E}(X \mid X \geq 1) = \frac{np}{1 - q^n}$.

c) Dans les familles de trois enfants ayant au moins une fille, quel est le nombre moyen de filles ?

Exercice 14 – La médiane de trois dés

On lance trois dés équilibrés et l'on note M la valeur médiane.

a) Montrer que $\mathbb{P}(M \leq k) = 3a^2 - 2a^3$ avec $a = \frac{k}{6}$ (au moins deux dés $\leq k$).

b) En déduire la loi de M.

c) Montrer que la loi est symétrique par rapport à $\frac{7}{2}$ et en déduire $\mathbb{E}(M)$.

Exercice 15 – Synthèse : le paradoxe de Saint-Pétersbourg

On lance une pièce équilibrée jusqu'au premier pile, obtenu au rang X ; le joueur reçoit $G = 2^X$ euros.

a) Déterminer la loi de G et montrer que $\mathbb{E}(G) = +\infty$.

b) La banque ne possède que 2^{20} euros (environ un million) : le gain réel est $G' = \min(G, 2^{20})$. Calculer $\mathbb{E}(G')$.

c) Quel prix d'entrée paraît raisonnable ? Calculer $\mathbb{P}(G \geq 64)$ et commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).