Plaquette 1 – Lois usuelles, approximations et couples de variables discrètes

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On reconnaît la **loi usuelle** derrière une modélisation, on utilise ses moments, on emploie l'**approximation de Poisson** pour les événements rares, et on manipule les **couples** : loi conjointe, marginales, conditionnelles, indépendance.

Exercice 1 – Reconnaître une loi

Identifier la loi de X dans chaque cas :

a) nombre de faces obtenues en 20 lancers d'une pièce ;

b) rang du premier as tiré avec remise dans un jeu de 32 cartes ;

c) nombre de fautes de frappe sur une page, sachant qu'il y en a 0,5 en moyenne.

Exercice 2 – Moments de la loi géométrique

Soit $X \sim G(p)$. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.

Exercice 3 – Moments de la loi de Poisson

Soit $X \sim P(\lambda)$. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathrm{V}(X) = \lambda$.

Exercice 4 – Approximation de Poisson

Une machine produit 1 % de pièces défectueuses. Sur un lot de 200 pièces, calculer la probabilité d'avoir exactement 3 défectueuses, de façon exacte puis approchée.

Exercice 5 – Loi conjointe

On lance deux dés. Soit X le minimum et Y le maximum des résultats. Calculer $\mathbb{P}(X = 2,\ Y = 5)$ et $\mathbb{P}(X = 3, Y = 3)$.

Exercice 6 – Lois marginales

Avec le couple précédent, déterminer la loi marginale de X (le minimum).

Exercice 7 – Indépendance

Soient X et Y indépendantes de loi $G(p)$. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 8 – Loi conditionnelle

Soient $X \sim B(n, p)$ et, sachant $X = k$, $Y \sim B(k, q)$ (on retient chaque succès avec probabilité q). Déterminer la loi de Y.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Loi du maximum

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, uniformes sur $[\![1, N]\!]$. Déterminer la loi de $M = \max X_i$.

Exercice 10 – Somme de variables indépendantes

Soient X et Y indépendantes, uniformes sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X + Y = s)$ pour $s \leq n + 1$.

Exercice 11 – Modélisation

Un serveur reçoit des requêtes selon $P(4)$ par seconde. Il tombe en panne si plus de 8 requêtes arrivent dans la même seconde. Calculer la probabilité de panne sur une seconde donnée.

Exercice 12 – Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants et l'on note S la somme des résultats.

a) Montrer que $\mathbb{P}(S = s) = \dfrac{6 - |s - 7|}{36}$ pour $2 \leq s \leq 12$.

b) Quelle est la valeur la plus probable ? Calculer $\mathbb{P}(S \geq 10)$.

c) S suit-elle une loi uniforme ? Peut-on truquer deux dés pour que S soit uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$? (On admettra que non.)

Exercice 13 – De la loi hypergéométrique à la loi binomiale

Une urne contient N boules dont Np blanches ($0 < p < 1$). On tire n boules sans remise et l'on note X_N le nombre de blanches.

a) Donner la loi de X_N.

b) Montrer que, n, k, p étant fixés, $\mathbb{P}(X_N = k) \to \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n - k}$ quand $N \to +\infty$ (avec Np entier).

c) Pour $N = 100$, $Np = 20$ et $n = 5$, comparer $\mathbb{P}(X = 0)$ avec la valeur binomiale.

Exercice 14 – Caractérisation de la loi géométrique

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{P}(X > n) > 0$ pour tout n, et sans mémoire : $\mathbb{P}(X > n + k \mid X > n) = \mathbb{P}(X > k)$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$.

a) On pose $u_n = \mathbb{P}(X > n)$. Montrer que $u_{n+k} = u_n u_k$.

b) En déduire $u_n = q^n$ avec $q = u_1 \in]0, 1[$ (justifier $q < 1$).

c) Conclure que $X \sim G(1 - q)$.

Exercice 15 – Synthèse : comparaison de lois

Comparer $\mathbb{P}(X \geq 1)$ pour $X \sim B(100\,;0{,}02)$ et $X \sim P(2)$, puis les variances.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).