Plaquette 5 – Synthèse : modéliser avec les lois discrètes

Lois discrètes — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Modéliser, c'est **traduire une situation concrète** en variables aléatoires : identifier l'**expérience élémentaire** et ses répétitions, décider si elles sont **indépendantes** et **identiques**, puis reconnaître la loi (binomiale pour un comptage de succès, hypergéométrique sans remise, géométrique ou Pascal pour un temps d'attente, Poisson pour des événements rares). Pour une **espérance de comptage**, on décompose en **indicatrices** sans chercher la loi. On termine par une **interprétation** chiffrée et un regard critique sur les hypothèses.

Exercice 1 – L'équilibre de Hardy-Weinberg

Un gène possède deux allèles A et a. Dans une population, les génotypes AA, Aa, aa ont pour fréquences u, v, w ($u+v+w=1$). Chaque enfant reçoit un allèle de chaque parent, tiré au hasard parmi les deux allèles de ce parent, les parents étant choisis au hasard et indépendamment.

a) Montrer qu'un parent transmet l'allèle A avec probabilité $p = u + \frac{v}{2}$.

b) En déduire les fréquences des génotypes à la génération suivante.

c) Montrer qu'elles ne changent plus ensuite (équilibre de Hardy-Weinberg).

Exercice 2 – Boules dans des boîtes

On lance n boules au hasard dans n boîtes (indépendamment, uniformément).

a) Calculer la probabilité qu'une boîte donnée reste vide.

b) En déduire l'espérance du nombre de boîtes vides (indicatrices).

c) Quelle proportion de boîtes reste vide en moyenne quand n est grand ? Application : $n = 10$.

Exercice 3 – Fiabilité d'un système

Un système comporte 3 composants qui fonctionnent indépendamment, chacun avec probabilité $p = 0{,}9$.

a) Calculer la probabilité de fonctionnement si les composants sont montés en série (tous nécessaires).

b) Même question en parallèle (un seul suffit).

c) Même question pour un système « 2 sur 3 » (au moins deux nécessaires), et comparer.

Exercice 4 – Défauts d'un tissu

Le nombre de défauts sur un mètre carré de tissu suit $P(0{,}5)$, et les nombres de défauts sur des surfaces disjointes sont indépendants.

a) Quelle est la loi du nombre de défauts sur une pièce de 4 m² ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer la probabilité qu'une pièce de 4 m² soit sans défaut, puis qu'elle en ait au plus deux.

c) Quelle surface maximale peut-on découper pour qu'elle soit sans défaut avec probabilité au moins 0,9 ?

Exercice 5 – Les arrêts d'un ascenseur

Dix personnes entrent dans un ascenseur au rez-de-chaussée d'un immeuble de 10 étages ; chacune choisit son étage uniformément et indépendamment.

a) Calculer la probabilité que l'ascenseur s'arrête au 5e étage.

b) En déduire l'espérance du nombre d'arrêts.

c) Calculer la probabilité qu'il s'arrête à chaque étage, et commenter.

Exercice 6 – La planche de Galton

Une bille descend une planche à n rangées de clous ; à chaque clou, elle part à droite ou à gauche avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. Elle tombe dans une case numérotée de 0 à n selon son nombre de déplacements à droite.

a) Quelle est la loi du numéro X de la case ?

b) Pour $n = 10$, calculer la probabilité de la case centrale, et celle d'une des deux cases extrêmes.

c) On lâche 1024 billes. Combien en attend-on dans la case centrale ? Pourquoi les tas dessinent-ils une « cloche » ?

Exercice 7 – Sinistres d'une compagnie d'assurance

Le nombre N de sinistres d'un assuré dans l'année suit $P(\lambda)$; chaque sinistre coûte 1 ou 2 (milliers d'euros) avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment, et l'on note S le coût total.

a) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$, $\mathbb{P}(S = 1)$ et $\mathbb{P}(S = 2)$.

b) En conditionnant par N, montrer que $\mathbb{E}(S) = \frac{3}{2}\lambda$.

c) Application : $\lambda = 0{,}2$. Quelle prime annuelle minimale la compagnie doit-elle demander ?

Exercice 8 – Les chances au loto

Un joueur coche 6 numéros parmi 49 ; 6 numéros gagnants sont tirés au hasard sans remise. On note X le nombre de bons numéros.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$, $\mathbb{P}(X = 3)$ et $\mathbb{P}(X = 0)$.

c) Calculer $\mathbb{E}(X)$ par les indicatrices.

Exercice 9 – Code à répétition

Un canal transmet chaque bit correctement avec probabilité $1 - p$, indépendamment, avec $p = 0{,}1$. Pour fiabiliser, on envoie chaque bit 3 fois et l'on décode par vote majoritaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer la probabilité d'erreur de décodage.

b) Même question en répétant 5 fois.

c) Commenter le compromis entre fiabilité et débit.

Exercice 10 – Premier défaut sur une chaîne de production

Une machine produit des pièces défectueuses avec probabilité $p = 0{,}002$, indépendamment. On note T le rang de la première pièce défectueuse.

a) Quelle est la loi de T ? Son espérance ?

b) Calculer la probabilité de produire plus de 1000 pièces sans défaut.

c) Sachant que les 500 premières pièces sont bonnes, quelle est la probabilité que les 1000 suivantes le soient aussi ?

Exercice 11 – Boîtes défectueuses sur une palette

Une palette contient 200 boîtes, chacune défectueuse avec probabilité 0,01, indépendamment. Le client refuse la palette si elle contient au moins 4 boîtes défectueuses.

a) Quelle est la loi exacte du nombre X de boîtes défectueuses ? Par quelle loi l'approcher ?

b) Calculer approximativement la probabilité de refus.

c) Sur 50 palettes livrées, combien de refus peut-on attendre ?

Exercice 12 – Rang du premier as

On retourne une à une les cartes d'un jeu de 32 cartes bien mélangé et l'on note T le rang du premier as.

a) Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T > k)$ pour $0 \leq k \leq 28$.

b) Calculer $\mathbb{P}(T > 5)$.

c) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \frac{33}{5}$ en écrivant $T - 1$ comme somme d'indicatrices « la carte non-as c précède les quatre as ».

Exercice 13 – Ce dé est-il pipé ?

On lance 60 fois un dé et l'on compte le nombre X de 6. On décide que le dé est pipé si $|X - 10| \geq 8$.

a) Si le dé est équilibré, quelle est la loi de X ? Son espérance et sa variance ?

b) Majorer, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la probabilité de déclarer pipé un dé équilibré.

c) Avec un dé qui donne 6 avec probabilité $\frac{1}{3}$, calculer $\mathbb{E}(X)$ et commenter la capacité du test à le détecter.

Exercice 14 – Avoir des enfants jusqu'au premier garçon

Dans un pays, chaque couple a des enfants jusqu'à la naissance du premier garçon, puis s'arrête (naissances indépendantes, garçon ou fille avec probabilité $\frac{1}{2}$).

a) Quelle est la loi du nombre F de filles d'une famille ? Son espérance ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Quelle est la loi du nombre d'enfants $F+1$?

c) Cette politique modifie-t-elle la proportion de filles dans la population ?

Exercice 15 – Synthèse : tests groupés

On doit dépister une infection de prévalence $p = 0{,}01$ dans une population de 1000 personnes. On mélange les prélèvements par groupes de k : si le test du mélange est négatif, les k personnes sont saines ; sinon on teste chacune individuellement.

a) Montrer que le nombre moyen de tests par personne est $f(k) = \frac{1}{k} + 1 - (1-p)^k$.

b) Calculer $f(10)$, $f(11)$, $f(12)$, et déterminer le meilleur k parmi ces valeurs.

c) En utilisant $1-(1-p)^k \approx kp$, montrer que le k optimal est voisin de $\frac{1}{\sqrt{p}}$ et que le gain est d'environ $2\sqrt{p}$ test par personne. Combien de tests économise-t-on ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).