Plaquette 3 – Extremums globaux : compacité, coercivité et convexité

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Compacité. Une fonction continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes.

Coercivité. Si F est fermée non vide et $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ ($x \in F$), f atteint son minimum sur F (on se ramène au compact $F \cap \{f \le f(x_0)\}$).

Convexité. Si f est convexe et différentiable sur un ouvert convexe :

$$f(y) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

donc $\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ minimum global. Pour f de classe C^2, f est convexe si et seulement si H_f est positive en tout point.

Correction de l'exercice 1 – Extremums sur un triangle

a) T est compact et f continue. $\nabla f = (2x - y - 1, 2y - x) = 0$ donne $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, intérieur, avec $f = -\frac{1}{3}$.

b) Sur $y = 0$: $x^2 - x$, de $-\frac{1}{4}$ (en $x = \frac{1}{2}$) à 2 (en $x = 2$). Sur $x = 0$: y^2, de 0 à 4. Sur $y = 2 - x$:

$$f(x, 2 - x) = 3x^2 - 7x + 4$$

minimale en $x = \frac{7}{6}$ (valeur $-\frac{1}{12}$), valant 4 en $x = 0$ et 2 en $x = 2$.

c) $\max_T f = 4$ en $(0, 2)$ et $\min_T f = -\frac{1}{3}$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Réponse. Maximum 4 en $(0, 2)$, minimum $-\frac{1}{3}$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 2 – Minimum global par coercivité

a) $x^4 + y^4 \ge \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ et $4|xy| \le 2(x^2 + y^2)$, donc $f \ge \frac{1}{2}r^4 - 2r^2 \to +\infty$.

b) $x^3 = y$ et $y^3 = x$ donnent $x^9 = x$, soit $x \in \{0, 1, -1\}$: points $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

c) Par coercivité, le minimum global existe et est atteint en un point critique ; or $f(\pm(1, 1)) = -2$ et $f(0, 0) = 0$, donc

$$\min f = -2$$

À l'origine, $H = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-16 < 0$: col.

Réponse. Minimum global -2 en $\pm(1, 1)$; col à l'origine.

Correction de l'exercice 3 – Une borne inférieure non atteinte

a) Si $f(x, y) = 0$, alors $x = 0$ et $xy = 1$, contradiction.

b) $f\left(\frac{1}{n}, n\right) = \frac{1}{n^2} \to 0$, donc $\inf f = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Non, d'après a). f n'est pas coercive :

$$\left\|\left(\frac{1}{n}, n\right)\right\| \to +\infty \quad \text{alors que} \quad f\left(\frac{1}{n}, n\right) \to 0$$

Une fonction polynomiale minorée n'atteint pas forcément sa borne inférieure en dimension 2 (contrairement à la dimension 1).

Réponse. $\inf f = 0$, non atteint : f n'est pas coercive.

Correction de l'exercice 4 – Minimum unique d'une fonction strictement convexe

a) $H = \mathrm{e}^{x+y}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2I_2$: somme d'une matrice positive et de $2I_2$, définie positive en tout point.

b) $\mathrm{e}^{x+y} + 2x = 0 = \mathrm{e}^{x+y} + 2y$ impose $x = y = t$ avec $\mathrm{e}^{2t} + 2t = 0$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{2t} + 2t$ est strictement croissante, de $-\infty$ à $+\infty$: une unique solution, $t \approx -0{,}2836$.

c) Le point critique d'une fonction convexe est un minimum global, unique par stricte convexité. Avec $\mathrm{e}^{2t} = -2t \approx 0{,}5671$:

$$\min f = \mathrm{e}^{2t} + 2t^2 \approx 0{,}5671 + 0{,}1608 \approx 0{,}728$$

Réponse. Minimum global unique en (t, t), $t \approx -0{,}2836$, de valeur $\approx 0{,}728$.

Correction de l'exercice 5 – Point le plus proche d'une hyperbole

a) $x \mapsto \|x - a\|$ est continue et coercive sur le fermé F : elle atteint son minimum (sur le compact $F \cap \overline{B}(a, \|x_1 - a\|)$, $x_1 \in F$ quelconque).

b) Sur H, $x^2 + y^2 \geq 2|xy| = 2$, avec égalité si $|x| = |y|$ et $xy = 1$:

$$d(0, H) = \sqrt{2}$$

c) Non : il est atteint en $(1, 1)$ et en $(-1, -1)$.

Réponse. $d(0, H) = \sqrt{2}$, atteinte en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Correction de l'exercice 6 – Maximum sur le plan entier

a) Cauchy-Schwarz : $|x + y| \leq \sqrt{2}\, r$.

b) $\varphi(r) = r\mathrm{e}^{-r^2}$ est maximale en $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $f \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-1/2} = \mathrm{e}^{-1/2}$. Il y a égalité si (x, y) est colinéaire à $(1, 1)$ de même sens et $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\max f = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-1/2}$$

c) $\partial_x f = (1 - 2x(x + y))E$, $\partial_y f = (1 - 2y(x + y))E$: $x = y$ et $4x^2 = 1$, soit $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (le point opposé donne le minimum $-\mathrm{e}^{-1/2}$).

Réponse. $\max f = \mathrm{e}^{-1/2}$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (et $\min f = -\mathrm{e}^{-1/2}$ au point opposé).

Correction de l'exercice 7 – Maximum à l'intérieur d'un compact

a) T est compact, $f = 0$ sur le bord et $f > 0$ à l'intérieur : le maximum est strictement positif, donc atteint à l'intérieur, en un point critique.

b) $y(1 - 2x - y) = 0$ et $x(1 - x - 2y) = 0$ avec $x, y > 0$: $2x + y = 1 = x + 2y$, d'où $x = y = \frac{1}{3}$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\max_T f = \frac{1}{27}$$

c) Avec $x = a$, $y = b$, on a $c = 1 - a - b$ et $abc = f(a,b) \le \frac{1}{27}$: c'est l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres.

Réponse. Maximum $\frac{1}{27}$ en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; d'où $abc \le \frac{1}{27}$.

Correction de l'exercice 8 – Point minimisant une somme de carrés de distances

a) $\nabla \|M - A\|^2 = 2(M - A)$, donc $\nabla f(M) = 2\sum_k (M - A_k) = 2p(M - G)$.

b) $H_f = 2pI_n$ est définie positive : f est strictement convexe, et son unique point critique G est le minimum global.

c) En développant $\|M - A_k\|^2 = \|M - G\|^2 + 2\langle M - G, G - A_k\rangle + \|G - A_k\|^2$ et en sommant :

$$\sum_k (G - A_k) = 0 \quad \text{donne} \quad f(M) = p\|M - G\|^2 + f(G)$$

Réponse. Minimum unique en l'isobarycentre G ; $f(M) = f(G) + p\|M - G\|^2$.

Correction de l'exercice 9 – Norme d'opérateur et nombre d'or

a) La sphère unité est compacte et $x \mapsto \|Ax\|$ est continue.

b) $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = x^{\mathsf T}A^{\mathsf T}Ax$, et $A^{\mathsf T}A$ est symétrique positive : en base orthonormée propre, $x^{\mathsf T}A^{\mathsf T}Ax = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 \le \lambda_{\max}$ sur la sphère, avec égalité sur un vecteur propre.

c) $A^{\mathsf T}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, donc

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

Réponse. $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathsf T}A)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Minimum sur un ouvert non borné

a) $1 - \frac{1}{x^2 y} = 0$ et $1 - \frac{1}{xy^2} = 0$: $x^2 y = xy^2 = 1$, d'où $x = y = 1$ et $f(1,1) = 3$.

b) Pour trois réels positifs, $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$, donc

$$x + y + \frac{1}{xy} \ge 3\sqrt[3]{x \cdot y \cdot \frac{1}{xy}} = 3$$

c) $\min_U f = 3$, atteint en $(1,1)$ seulement. Sans l'inégalité : $f \to +\infty$ quand x ou y tend vers $+\infty$, ou quand $xy \to 0$; f atteint donc son minimum sur un compact $\{f \le 4\}$ de U, en un point critique.

Réponse. Minimum global 3 en $(1,1)$.

Correction de l'exercice 11 – Convexité et minimum global

a) $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ est convexe sur $[0,1]$: $\varphi(1) - \varphi(0) \ge \varphi'(0) = \langle \nabla f(x), y - x\rangle$.

b) Si $\nabla f(x^*) = 0$, alors $f(y) \ge f(x^*)$ pour tout $y \in U$.

c) f est convexe (somme d'une convexe et d'une linéaire), et $\partial_x f = \frac{e^x}{e^x + e^y} - \frac{1}{2} = 0$ si et seulement si $x = y$ ($\partial_y f$ de même). Tous les points de la droite $y = x$ sont des minimums

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

globaux, de valeur

$$f(t,t) = \ln(2\mathrm{e}^t) - t = \ln 2$$

Le minimum n'est pas strict : f est convexe mais pas strictement.

Réponse. Minimum global $\ln 2$, atteint sur toute la droite $y = x$.

Correction de l'exercice 12 – Démontrer une inégalité par un minimum

a) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 1 et 3 : définie positive, f est strictement convexe.

b) $2x - y - 1 = 0$ et $2y - x - 1 = 0$: $x = y = 1$, et

$$f(1,1) = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = 0$$

c) $f \geq 0$ avec égalité seulement en $(1,1)$. (Autre preuve : $2f = (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$.)

Réponse. $\min f = 0$ en $(1,1)$: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$, égalité ssi $x = y = 1$.

Correction de l'exercice 13 – Extremums sur un disque avec un bord décisif

a) $\nabla f = (2xy, x^2) = 0$ si et seulement si $x = 0$: toute la droite $x = 0$, où $f = 0$.

b) Sur le cercle, $x^2 = 3 - y^2$ et $f = g(y) = 3y - y^3$ pour $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. $g'(y) = 3 - 3y^2$ s'annule en ± 1 :

$$g(1) = 2, \quad g(-1) = -2, \quad g(\pm\sqrt{3}) = 0$$

c) $\max_D f = 2$ en $(\pm\sqrt{2}, 1)$ et $\min_D f = -2$ en $(\pm\sqrt{2}, -1)$: les extremums sont sur le bord, les points critiques intérieurs n'en sont pas.

Réponse. Maximum 2 en $(\pm\sqrt{2}, 1)$, minimum -2 en $(\pm\sqrt{2}, -1)$, sur le bord.

Correction de l'exercice 14 – Boîte sans couvercle de surface minimale

a) $S = xy + 2xz + 2yz$ et $z = \frac{32}{xy}$, d'où $S(x,y) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$.

b) $y - \frac{64}{x^2} = 0$ et $x - \frac{64}{y^2} = 0$: $x^2 y = xy^2 = 64$, donc $x = y = 4$ et $z = 2$.

c) $S \to +\infty$ quand x ou y tend vers 0 ou vers $+\infty$ (si $x, y \geq \varepsilon$ et $x \to +\infty$, $xy \to +\infty$), donc S atteint son minimum sur un compact de l'ouvert, en un point critique :

$$S_{\min} = 16 + 16 + 16 = 48 \text{ cm}^2$$

pour un fond carré de côté 4 cm et une hauteur de 2 cm.

Réponse. Fond 4×4 cm, hauteur 2 cm, surface minimale 48 cm².

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : minimisation d'une fonction quadratique

a) $\nabla f(x) = Ax - b$ et $H_f = A$.

b) f est strictement convexe, d'unique point critique $x^* = A^{-1}b$, et $f(x^*) = \frac{1}{2}b^{\mathsf{T}}A^{-1}b - b^{\mathsf{T}}A^{-1}b = -\frac{1}{2}b^{\mathsf{T}}A^{-1}b$. Application : $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et

$$f(x^*) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

c) Si $Av = \lambda v$ avec $\lambda < 0$ et $v \neq 0$: $f(tv) = \frac{\lambda t^2}{2}\|v\|^2 - tb^{\mathsf{T}}v \to -\infty$ quand $t \to +\infty$.

Réponse. Minimum unique $-\frac{1}{2}b^{\mathsf{T}}A^{-1}b$ en $A^{-1}b$ (ici $-\frac{1}{3}$ en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$) ; non minorée si A a une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

valeur propre négative.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).