Plaquette 1 – Extremums libres, sous contrainte et multiplicateurs de Lagrange

Optimisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Existence. Une fonction **continue** sur un **compact** atteint ses bornes. Si le domaine n'est pas compact, on cherche un **comportement à l'infini** (coercivité : $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ garantit l'existence d'un minimum).

Condition nécessaire d'ordre 1. En un extremum **local intérieur** d'une fonction différentiable : $\nabla f(a) = 0$.

Conditions d'ordre 2. Avec $H = H_f(a)$ la hessienne en un point critique :

— H **définie positive** ⇒ **minimum local strict** ;
— H **définie négative** ⇒ **maximum local strict** ;
— H de **signature mixte** ⇒ **point col** ;
— H **dégénérée** ($\det H = 0$) ⇒ cas **indécis**, il faut étudier directement.

En dimension 2 : avec $r = \partial_{xx} f$, $s = \partial_{xy} f$, $t = \partial_{yy} f$ et $\det H = rt - s^2$,

— $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$: minimum ; $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$: maximum ; $rt - s^2 < 0$: col.

Convexité. Si f est **convexe** ($H \geq 0$ partout), tout point critique est un **minimum global**. Si f est strictement convexe et coercive, ce minimum est **unique**.

Multiplicateurs de Lagrange. Pour optimiser f sous la contrainte $g = 0$ (avec $\nabla g \neq 0$ sur la contrainte), en un extremum a il existe λ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

— **Interprétation** : les lignes de niveau de f et la contrainte sont **tangentes** en a.
— **Méthode pratique** : résoudre le système formé de cette égalité et de $g(a) = 0$, puis **comparer les valeurs** de f aux points obtenus (le théorème ne dit pas lesquels sont des extremums).

Correction de l'exercice 1 – Extremum libre

— **Points critiques** : $\nabla f = (2x - 4,\ 2y + 6) = 0$ donne $(2, -3)$.
— **Hessienne** : $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ — **définie positive** (valeurs propres 2 et 2).
— Donc $(2, -3)$ est un **minimum local**.
— **Forme canonique** (qui donne le caractère global) :

$$f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + 13 - 4 - 9 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2$$

— Donc $f \geq 0$ partout, avec égalité seulement en $(2, -3)$: c'est un **minimum global**, de valeur 0.
— **Pas de maximum** : $f(x, 0) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.
— **Lecture géométrique** : f est le carré de la distance au point $(2, -3)$.

Réponse. Minimum global 0 en $(2, -3)$; pas de maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Point col

— **Points critiques** : $\nabla f = (2x + 2,\ -2y) = 0$ donne $(-1, 0)$.

— **Hessienne** : $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 2 et -2 — **signature mixte**.

— $(-1, 0)$ est donc un **point col** : f n'a **ni maximum ni minimum**.

— **Vérification directe** : $f(-1, 0) = 1 - 0 - 2 = -1$, et

$$f(-1 + h, k) = (h - 1)^2 - k^2 + 2(h - 1) = h^2 - k^2 - 1$$

— Le long de $k = 0$, f **augmente** ; le long de $h = 0$, f **diminue** ✓

— **Critère rapide en dimension 2** : $rt - s^2 = 2 \times (-2) - 0 = -4 < 0$ — col, sans calcul de valeurs propres.

Réponse. Point col en $(-1, 0)$; aucun extremum.

Correction de l'exercice 3 – Cas dégénéré

— **Points critiques** : $\nabla f = \left(4x^3, 4y^3\right)$ et $\nabla g = \left(4x^3, -4y^3\right)$ s'annulent tous deux en $(0, 0)$.

— **Hessiennes en** 0 : $H_f(0, 0) = H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — **dégénérées**, le critère d'ordre 2 est **muet**.

— **Étude directe de** f : $x^4 + y^4 \geq 0$ avec égalité seulement en $(0, 0)$ — c'est un **minimum global strict**.

— **Étude directe de** g : $g(x, 0) = x^4 > 0$ et $g(0, y) = -y^4 < 0$ — g prend les deux signes, c'est un **point col**.

— **Conclusion** : deux fonctions de même hessienne nulle, de natures **opposées**.

— **Leçon** : quand $\det H = 0$, le développement d'ordre 2 ne décide pas ; il faut examiner les termes d'ordre supérieur ou raisonner directement.

Réponse. f : minimum global · g : point col — la hessienne ne tranche pas.

Correction de l'exercice 4 – Existence par compacité

— **Existence** : D est **compact** et f **continue** — le maximum est atteint.

— **Points critiques intérieurs** : $\nabla f = (2x - y,\ 2y - x) = 0$ donne $x = y = 0$, où $f = 0$.

— **Sur le bord** : paramétrage $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$,

$$f = 1 - \cos\theta \sin\theta = 1 - \frac{\sin 2\theta}{2}$$

— Cette expression est **maximale** quand $\sin 2\theta = -1$, soit $\theta = -\frac{\pi}{4}$ (ou $\frac{3\pi}{4}$), avec $f = \frac{3}{2}$.

— **Comparaison** : $\frac{3}{2} > 0$, donc le **maximum** vaut $\frac{3}{2}$, atteint en $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

— **Minimum** : $f = \frac{1}{2}$ sur le bord quand $\sin 2\theta = 1$, mais $f(0, 0) = 0$ est plus petit — le **minimum** est 0 à l'origine.

— **Contrôle** : f est définie positive (valeurs propres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$), donc $f \geq 0$ ✓

Réponse. Maximum $\frac{3}{2}$ sur le bord ; minimum 0 à l'origine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Contrainte par substitution

Méthode par substitution : $x = 5 - 2y$.

— On minimise $g(y) = (5-2y)^2 + y^2 = 5y^2 - 20y + 25$.
— $g'(y) = 10y - 20$, nulle en $y = 2$; $g'' = 10 > 0$: **minimum**.
— Alors $x = 5 - 4 = 1$, et $f(1,2) = 1 + 4 = 5$.
— **Vérification par Lagrange** : $\nabla f = (2x, 2y)$ et $\nabla g = (1,2)$, donc $2x = \lambda$ et $2y = 2\lambda$, soit $y = 2x$. Avec la contrainte, $x + 4x = 5$ donne $x = 1$, $y = 2$ ✓
— **Lecture géométrique** : le minimum est le **projeté orthogonal** de l'origine sur la droite. La distance vaut $\dfrac{|0+0-5|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$, donc $f = 5$ ✓

Réponse. Minimum 5 en $(1,2)$.

Correction de l'exercice 6 – Multiplicateurs de Lagrange

Existence : le cercle est **compact**, f continue — les extremums existent.

Lagrange avec $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$:

— $\nabla f = (y, x)$ et $\nabla g = (2x, 2y)$, donc le système est $y = 2\lambda x$, $x = 2\lambda y$, $x^2 + y^2 = 1$.
— En multipliant les deux premières : $xy = 4\lambda^2 xy$. Soit $xy = 0$, soit $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$.
— **Cas** $xy = 0$: par exemple $x = 0$ donne $y = \pm 1$ et $f = 0$.
— **Cas** $\lambda = \frac{1}{2}$: $y = x$, donc $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f = \dfrac{1}{2}$.
— **Cas** $\lambda = -\frac{1}{2}$: $y = -x$, et $f = -\dfrac{1}{2}$.
— **Comparaison des valeurs** : maximum $\dfrac{1}{2}$, minimum $-\dfrac{1}{2}$.
— **Contrôle par paramétrage** : $f = \cos\theta \sin\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2} \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right]$ ✓
— **Remarque** : Lagrange fournit des **candidats** ; c'est la comparaison des valeurs qui identifie les extremums.

Réponse. Maximum $\dfrac{1}{2}$, minimum $-\dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Optimisation convexe

— **Points critiques** : $\nabla f = (\mathrm{e}^x - 1, \mathrm{e}^y - 1) = 0$ donne $x = y = 0$.
— **Hessienne** : $H = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix}$, **définie positive** en **tout point** — f est donc **strictement convexe**.
— Pour une fonction convexe, tout point critique est un **minimum global** : le minimum vaut

$$f(0,0) = 1 + 1 - 0 - 0 = 2$$

— **Unicité** : la stricte convexité garantit que ce minimum est atteint en un **seul** point.
— **Contrôle** : $f(1,0) = \mathrm{e} + 1 - 1 = \mathrm{e} \approx 2{,}718 > 2$ ✓ ; $f(-1,0) = \mathrm{e}^{-1} + 1 + 1 \approx 2{,}368 > 2$ ✓
— **Coercivité** : $f(x,y) \to +\infty$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$ (l'exponentielle domine à droite, $-x$ domine à gauche), ce qui confirme l'existence du minimum sans compacité.

Réponse. Minimum global 2 en $(0,0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Inégalité par optimisation

Méthode 1 — réduction à une variable. Posons $t = \frac{x}{y} > 0$; il s'agit de montrer $t + \frac{1}{t} \geq 2$.

— Soit $\varphi(t) = t + \frac{1}{t}$. Alors $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$, nulle en $t = 1$, négative avant, positive après.

— Donc φ atteint son **minimum** en $t = 1$, où $\varphi(1) = 2$.

Méthode 2 — algébrique. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$ ✓

— **Cas d'égalité** : $x = y$.

— **Interprétation** : c'est l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{x}$, dont le **produit vaut** 1.

— **Généralisation** : $\sum_i \frac{x_i}{x_{i+1}} \geq n$ pour des réels strictement positifs (avec $x_{n+1} = x_1$).

Réponse. Minimum de $t + \frac{1}{t}$ atteint en $t = 1$, égal à 2.

Correction de l'exercice 9 – Optimisation géométrique

— **Contrainte** : $2(x + y) = 20$, donc $y = 10 - x$ avec $x \in]0\,;10[$.

— **Objectif** : $A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$.

— $A'(x) = 10 - 2x$, nulle en $x = 5$; $A'' = -2 < 0$: **maximum**.

— **Solution** : $x = y = 5$ — le rectangle optimal est le **carré**, d'aire 25.

— **Contrôle** : $x = 4$ donne $A = 24 < 25$; $x = 6$ donne 24 également ✓

— **Par Lagrange** : $\nabla A = (y, x)$ et $\nabla g = (1, 1)$ donnent directement $x = y$.

— **Principe isopérimétrique** : à périmètre fixé, la figure la plus « ronde » maximise l'aire — le carré parmi les rectangles, le cercle parmi toutes les courbes fermées.

Réponse. Le carré de côté 5, d'aire 25.

Correction de l'exercice 10 – Deux contraintes

Substitution (plus simple que deux multiplicateurs ici).

— De la seconde contrainte : $x = y + 1$.

— La première devient $2y + 1 + z = 3$, donc $z = 2 - 2y$.

— **Objectif** :
$g(y) = (y+1)^2 + y^2 + (2-2y)^2 = y^2 + 2y + 1 + y^2 + 4 - 8y + 4y^2 = 6y^2 - 6y + 5$.

— $g'(y) = 12y - 6$, nulle en $y = \frac{1}{2}$; $g'' = 12 > 0$: **minimum**.

— Alors $x = \frac{3}{2}$, $z = 1$, et $f = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{14}{4} = 3{,}5$.

— **Vérification des contraintes** : $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 3$ ✓ et $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ ✓

— **Interprétation** : c'est le point de la **droite** (intersection des deux plans) le plus proche de l'origine — son projeté orthogonal.

— **Contrôle** : le vecteur $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ doit être orthogonal à la direction de la droite, dirigée par $(1, 1, -2)$: $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0$ ✓

Réponse. Minimum 3,5 en $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Moindres carrés

— **Dérivées partielles** :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum x_i(ax_i + b - y_i), \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum (ax_i + b - y_i)$$

— **Équations normales** : $a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$ et $a\sum x_i + 3b = \sum y_i$.

— **Données** : $\sum x_i = 6$, $\sum x_i^2 = 14$, $\sum y_i = 10$, $\sum x_i y_i = 2 + 6 + 15 = 23$.

— **Système** : $14a + 6b = 23$ et $6a + 3b = 10$.

— En doublant la seconde : $12a + 6b = 20$; par soustraction, $2a = 3$, donc $a = 1{,}5$ et $b = \dfrac{10 - 9}{3} = \dfrac{1}{3}$.

— **Droite de régression** : $y = 1{,}5x + \dfrac{1}{3}$.

— **Contrôle statistique** : $\overline{x} = 2$, $\overline{y} = \dfrac{10}{3}$; covariance $= \dfrac{(-1)(2 - \frac{10}{3}) + 0 + 1(5 - \frac{10}{3})}{3} = \dfrac{\frac{4}{3} + \frac{5}{3}}{3} = 1$; variance de $x = \dfrac{2}{3}$; donc $a = \dfrac{1}{2/3} = 1{,}5$ ✓ et $b = \overline{y} - a\overline{x} = \dfrac{10}{3} - 3 = \dfrac{1}{3}$ ✓

— **Convexité** : S est une forme quadratique **définie positive** en (a, b) (les x_i n'étant pas tous égaux), le point critique est donc le minimum **global**.

Réponse. $a = 1{,}5$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 12 – Extremums sur le disque fermé

a) D est fermé borné en dimension finie, donc compact, et f est continue.

b) $\nabla f = (2x - 1, 4y) = 0$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, intérieur à D, avec $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

c) Sur le cercle, $y^2 = 1 - x^2$ et $f = 2 - x^2 - x$ pour $x \in [-1, 1]$. Cette fonction de x est maximale en $x = -\frac{1}{2}$ et minimale en $x = 1$:

$$f\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}, \qquad f(1, 0) = 0, \qquad f(-1, 0) = 2$$

Conclusion : $\max_D f = \frac{9}{4}$ en $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\min_D f = -\frac{1}{4}$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Réponse. Maximum $\frac{9}{4}$ en $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, minimum $-\frac{1}{4}$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Correction de l'exercice 13 – Hessienne en dimension trois

a) $\nabla f = (2x + y - 1, x + 2y + z, y + 2z) = 0$ donne $z = -\frac{y}{2}$, $x = \frac{1 - y}{2}$, puis $y = -\frac{1}{2}$: le point critique est $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

b) $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 2 et $2 \pm \sqrt{2}$, toutes strictement positives.

c) H est constante et définie positive : f est strictement convexe, donc le point critique est le minimum global. Comme $f(X) = \frac{1}{2}X^{\mathsf{T}}HX - \langle b, X\rangle$ avec $b = (1, 0, 0)$, la valeur minimale est

$$-\frac{1}{2}\langle b, X^*\rangle = -\frac{3}{8}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Minimum global $-\frac{3}{8}$ en $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 14 – Forme quadratique sur le cercle

a) $\nabla q = (2x + y, x + 2y)$ et $\nabla g = (2x, 2y)$: $2x + y = 2\lambda x$, $x + 2y = 2\lambda y$, $x^2 + y^2 = 1$.

b) Le système s'écrit $AX = \lambda X$. Les valeurs propres de A sont $\frac{3}{2}$ (vecteur $(1, 1)$) et $\frac{1}{2}$ (vecteur $(1, -1)$), et en un tel point $q(X) = X^{\mathsf{T}}AX = \lambda$. Ainsi

$$\max_C q = \frac{3}{2} \text{ en } \pm\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \qquad \min_C q = \frac{1}{2} \text{ en } \pm\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$$

(les extremums existent car C est compact).

c) En base orthonormée de vecteurs propres, $q = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2$: sur le cercle, q varie entre la plus petite et la plus grande valeur propre.

Réponse. Maximum $\frac{3}{2}$ en $\pm\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$, minimum $\frac{1}{2}$ en $\pm\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$: les valeurs propres de A.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : boîte de volume maximal

Notons $2x$, $2y$, $2z$ les dimensions, avec $x, y, z > 0$ et la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

— **Objectif** : maximiser $V = 8xyz$.

— **Existence** : la contrainte définit une partie **compacte** (portion de sphère, fermée bornée) et V est continue — le maximum est atteint, et à l'intérieur car $V = 0$ au bord.

— **Lagrange** : $\nabla V = 8(yz, xz, xy)$ et $\nabla g = 2(x, y, z)$, d'où

$$8yz = 2\lambda x, \qquad 8xz = 2\lambda y, \qquad 8xy = 2\lambda z$$

— En multipliant la première par x, la deuxième par y : $8xyz = 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$, donc $x = y$ (valeurs positives). De même $y = z$.

— **Contrainte** : $3x^2 = R^2$, donc $x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

— **Volume maximal** :

$$V = 8 \times \frac{R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\,R^3}{9} \approx 1{,}5396\,R^3$$

— **Conclusion** : c'est le **cube**, d'arête $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

— **Contrôle** : la sphère a pour volume $\frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}19R^3$; le cube inscrit en occupe environ 37 % — plausible ✓

Réponse. Le cube d'arête $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, de volume $\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3 \approx 1{,}54R^3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).